LES NOMBRES COMPLEXES

1 Introduction

L'équation $x + 9 = 3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$, mais elle en a dans un ensemble plus grand : $\mathbb{Z}$ ($x = -6$).

De même l'équation $7x = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$, alors que dans un ensemble plus grand $\mathbb{Q}$, il y en a une $x = \frac{2}{7}$.

Enfin l'équation $x^2 = 3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, par contre il faut chercher dans $\mathbb{R}$ pour en trouver.

En définitive, quand une équation n'a pas de solution dans un ensemble donné, une démarche naturelle et historique consiste à en chercher dans un ensemble plus grand.

L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'ayant pas de solution dans $\mathbb{R}$, on a donc imaginé un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$ dans lequel l'équation $x^2 + 1 = 0$ a des solutions. On l'appellera $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Le principal élément de $\mathbb{C}$ sera noté i (i comme imaginaire). Le nombre i est tel que $i^2 = -1$.

2 Formes algébriques d'un nombre complexe

2.1 Définitions générales

Définition 1 *Un nombre complexe est un élément de la forme $x + iy$ où x et y sont des réels et i est un nombre vérifiant $i^2 = -1$. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.*

Théorème 1 *Tout nombre complexe s'écrit de façon unique sous la forme $x + iy$ ou x et y sont des réels. ($x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$).*

$\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication : ces opérations prolongent celles de $\mathbb{R}$ et les règles de calcul sont les mêmes.

Démonstration

- Si $x = x'$ et $y = y'$ alors $x + iy = x' + iy'$
- Réciproquement, si $x + iy = x' + iy'$ alors $(x - x') + i(y - y') = 0$. Supposons alors que $y \neq y'$, alors on pourrait écrire que $i = -\frac{x-x'}{y-y'}$.Le nombre i serait réel et on ne pourrait avoir $i^2 = -1$.
  Donc $y - y' = 0$ et par conséquent $y = y'$.
  L'égalité $(x - x') + i(y - y') = 0$ devient alors $x - x' = 0$, d'où $x = x'$.
  On a donc montré que si $x + iy = x' + iy'$ alors $x = x'$ et $y = y'$.

Définition 2 *L'écriture $x+iy$ (où x et y sont des réels) d'un nombre complexe z est la forme algébrique d'un complexe.*

x est la partie réelle du nombre complexe z notée Re(z)
y est la partie imaginaire du nombre complexe z notée Im(z)

Définition 3 *Un nombre complexe de forme algébrique iy est appelé imaginaire pur.*

Théorème 2 *Pour tout nombre complexe z :*
z est un réel ssi Im(z)=0
z est un imaginaire pur ssi Re(z)=0

2.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

Définition 4 *A tout nombre complexe, $z = x + iy$ est associé le point M du plan de coordonnées (x ;y) appelé <u>image</u> de z et noté M(z).*

A tout <u>point</u> M du plan de coordonnées $(x; y)$ est associé le nombre complexe $z = x + iy$ appelé <u>affixe</u> du point M.

2.3 opérations sur les nombres complexes

Soient deux nombres complexes z et z' de formes algébriques respectives $x + iy$ et $x' + iy'$.

<u>Somme et produit</u>
$z + z' = (x + x') + i(y + y')$ et $zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$.
<u>Inverse</u>
Tout nombre complexe non nul z admet un inverse noté $\frac{1}{z}$ de forme algébrique $\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$.
<u>Quotient</u>
On défini le quotient $\frac{z}{z'}$ par $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ avec $z' \neq 0$.

Définition 5 *On appelle <u>conjugué</u> du nombre complexe $x+iy$ (avec x et y réels) le nombre complexe noté $\overline{z}$ dont la forme algébrique est $x - iy$.*

<u>*Conséquences :*</u> $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\ \mathrm{Im}(z)$

2.4 Propriétés des conjugués

<u>*Conséquences de la définition d'un conjugué :*</u>
z est réel ssi $\overline{z} = z$
z est imaginaire pur ssi $\overline{z} = -z$

<u>*Remarque :*</u> $\overline{\overline{z}} = z$ et $z\overline{z} = x^2 + y^2$.

Propriété 1 *Pour tous nombres complexes z et z', et pour tout entier naturel n on a :*
$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$; $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
De plus si $z' \neq 0$ on a $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ *et* $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

<u>*Conséquence graphique :*</u> Les points $\mathrm{M}(z)$ et $\mathrm{M}_1(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

2.5 Affixe et géométrie

Définition 6 *A tout vecteur $\vec{u}$ du plan de coordonnées* $\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ *est associé le nombre complexe $z = x+iy$ appelé <u>affixe</u> du vecteur $\vec{u}$.*

Réciproquement à tout nombre complexe $z = x + iy$ est associé le vecteur $\vec{u}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$

Propriété 2 *Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$*
l'affixe du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est $z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$. Si k est un réel l'affixe du vecteur $k\,\vec{u}$ est $k\ z_{\vec{u}}$.

<u>Affixe d'un vecteur, affixe du milieu</u>

Propriété 3 *Soient deux points A et B du plan complexe d'affixes respectives z_A et z_B.*
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.
L'affixe de I le milieu de [AB] est $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$.

3 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.

3.1 Module et argument d'un nobre complexe non nul

Définition 7 *Soit z un nombre complexe non nul et M le point du plan complexe d'affixe z et ayant pour coordonnées polaires (r,θ) dans le repère $(O\,;\,\vec{u})$. On dit alors que :*
r est le <u>module</u> de z noté $|z|$.
θ est un <u>argument</u> de z noté $arg(z)$
Ainsi $|z| = r = OM > 0$ et $\theta = (\vec{u};\overrightarrow{OM})$ $[2\,\pi]$.

<u>*Remarque :*</u> $|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $z\overline{z} = x^2+y^2$ donc $z\overline{z} = |z|^2$

3.2 Forme trigonométrique

Propriété 4 *Soit z un nombre complexe non nul, r un réel strictement positif et θ un réel.*
z a pour module r et argument θ ssi $z = r(\cos\theta + i\,\sin\theta)$.
Cette nouvelle écriture est appelée <u>forme trigonométrique</u> de z.

Propriété 5 <u>*égalité de deux complexes*</u>
Les complexes $z = r(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\,\sin\theta')$ (avec r et r' strictement positifs) sont égaux ssi $\begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\,\pi, \ \text{avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Théorème 3 *Soient $z = r(\cos\theta + i\,\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\,\sin\theta')$ deux nombres complexes.*
$zz' = rr'(cos(\theta+\theta') + i\,sin(\theta+\theta')$
$\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'}(cos(-\theta') + i\,sin(-\theta'))$ et $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}(cos(\theta-\theta') + i\,sin(\theta-\theta'))$

$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\ \lvert z'\rvert$	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$; $n \in \mathbb{Z}$	$\lvert\frac{1}{z}\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$; $z \neq 0$	$\lvert\frac{z}{z'}\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$; $z' \neq 0$
$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$	$\arg(z^n) = n\ \arg(z)[2\pi]$	$\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)[2\pi]$	$\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$

3.3 Lien avec la géométrie

Soient z_A, z_B, z_C et z_D quatre complexes distincts d'images A, B, C et D dans le plan complexe.

<u>**Distance et angle :**</u>
$|z_B - z_A|$=AB et $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u};\overrightarrow{AB})$;
$|\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}| = \frac{CB}{CA}$ et $\arg(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}) = (\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$;

<u>*Conséquences*</u> :
Les points A, B et C sont alignés ssi $\arg(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}) = 0$ $[\pi]$ c'est à dire $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ est un réel.
Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires ssi $\arg(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ c'est à dire $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ est un imaginaire pur

Les deux conséquences ci-dessus sont essentielles pour déterminer la nature d'un triangle ou un alignement de points

<u>*Caractérisation des cercles et des médiatrices*</u>

Cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon R	Δ la médiatrice du segment [AB]
$M(z) \in \mathcal{C} \ \Leftrightarrow\ \Omega M = R$	$M(z) \in \Delta \ \Leftrightarrow\ MA = MB$
$\Leftrightarrow\ \lvert z - \omega\rvert = R$	$\Leftrightarrow\ \lvert z - z_A\rvert = \lvert z - z_B\rvert$

4 Notation exponentielle

Définition 8 *Tout nombre complexe de module r strictement positif et d'argument θ admet une écriture du type $z = re^{i\theta}$, appelée forme exponentielle de z.*

Règles de calcul : $e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$ et $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

Formule de De Moivre : θ étant un réel quelconque et n un entier naturel on a :

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \text{ ou } (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}}$$

Formules d'Euler : $\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$

Ces formules servent à linéariser des polynômes trigonométriques.

5 Equation du second degré

Propriété 6 *L'équation $az^2 + bz + c = 0$ à coefficients complexes admet deux solutions :*

$$\boxed{z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ où } \delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac.}$$

6 Transformations complexes du plan

Dans ce paragraphe le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ du type $z \mapsto z' = f(z)$.
On appellera M l'image de z et M' celle de z', et on appellera transformation associée à f la transformation du plan qui transforme M en M'.

6.1 Fonction $f : z \mapsto z + b$

La transformation associée à $f : z \mapsto z + b$ est la translation $t_{\vec{w}}$ où $\vec{w}$ est le vecteur d'affixe b.

6.2 Fonction $f : z \mapsto \overline{z}$

La transformation associée à $f : z \mapsto \overline{z}$ est la symétrie d'axe (Ox).

6.3 Fonction $f : z \mapsto \omega + a(z - \omega)$

6.3.1 Cas où $\omega = 0$

La transformation géométrique associée à $f : z \mapsto az$ est la similitude de centre O, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$.

Cas particuliers :
$|a| = 1$: il s'agit de la rotation de centre O et d'angle $\arg a$.
$\arg a = 0$: $(a \in \mathbb{R}^+)$ il s'agit de l'homothétie de centre O et de rapport a.

6.3.2 $\omega \neq 0$:

La transformation associée à $f : z \mapsto \omega + a(z - \omega)$ est la similitude de centre $\Omega(\omega)$, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg a$.

6.4 Inversion complexe

Définition 9 *On appelle inversion complexe l'application qui à tout point M distinct de O associe le point M' tel que :*

- $OM.OM' = 1$
- *M' appartient à la demi-droite issue de O symétrique de la demi-droite $[OM)$ par rapport à l'axe (Ox) et privée du point O.*

La transformation associée à $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ est l'inversion complexe.

Propriété 7 *L'image d'une droite ne passant pas par O par une inversion complexe est un cercle privé de O.*

Propriété 8 *L'image de la droite d'équation $x = a$ $(a \neq 0)$ par une inversion complexe est le cercle de centre $\Omega(\frac{1}{2a})$ et de rayon $\frac{1}{2|a|}$ privé de O.*