EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1 Généralités

Définition 1 *Une* ***équation différentielle*** *est une équation de la forme*

$$f\left(x, y, y', \ldots, y^{(i)}, \ldots y^{(n)}\right) = 0 \tag{E}$$

d'inconnue y, où y est une fonction de la variable x.
$y^{(i)}$ représente la dérivée d'ordre i de y par rapport à x.

En notation différentielle, on écrit $y^{(i)} = \frac{d^i y}{dx^i}$.

Définition 2 *Dans l'équation (E) ci-dessus, n s'appelle* ***l'ordre de l'équation****.*
$f(x, y, y')$ est une équation différentielle du ***premier ordre*** *.*
$f(x, y, y', y'')$ est une équation différentielle du ***second ordre****.*

Définition 3 *Résoudre ou intégrer l'équation différentielle (E) consiste à trouver toutes les fonctions y qui vérifient l'équation (E) sur un intervalle I.*

Définition 4 *Une solution particulière de l'équation différentielle (E) est une fonction qui vérifie (E).*

2 Equations différentielles du premier ordre à variables séparables

Définition 5 *Une équation différentielle du premier ordre est dite* ***à variables séparables*** *si elle peut s'écrire sous la forme :*

$$f(x)\, dx = g(y)\, dy$$

Pour la résoudre, on intégre les deux membres séparément, sans oublier les constantes d'intégration. Résolvons par exemple l'équation différentielle :

$$y - \frac{y'}{2x} = 1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

On écrit cette équation sous forme différentielle, puis on sépare les variables :

$$y - \frac{dy}{2x\, dx} = 1 \Leftrightarrow y - 1 = \frac{dy}{2x\, dx} \Leftrightarrow \frac{dy}{y-1} = 2x\, dx$$

Par intégration de cette relation, il vient :

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int 2x\, dx \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y-1}{k}\right) = x^2 \Leftrightarrow y - 1 = ke^{x^2}$$

en choisissant la constante k réelle telle que $k(y-1) > 0$. On en déduit que l'ensemble des solutions est constitué des fonctions $x \mapsto 1 + ke^{x^2}$.

3 Equations différentielles linéaires du premier ordre

3.1 Définition

Définition 6 *Il s'agit d'équations qui s'écrivent après réduction, sous la forme standard :*

$$a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

où a, b et c sont des fonctions de la variable réelle x, continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction a ne s'annule pas, et $t \mapsto y$ une fonction inconnue à déterminer, dérivable I.

Définition 7 *On appelle équation différentielle* ***homogène*** *associée l'équation*

$$a(t)y' + b(t)y = 0 \tag{EH}$$

3.2 Résolution des équations sans second membre

Théorème 1 *Les solutions de l'équation différentielle homogène (EH) sont données par*

$$t \mapsto Ke^{\int -\frac{b(t)}{a(t)}\,dt}$$

où K est une constante réelle quelconque.

3.3 Cas général

Théorème 2 *Les solutions de l'équation différentielle*

$$a\left(t\right)y' + b\left(t\right)y = c\left(t\right)$$

s'obtiennent en ajoutant une solution particulière de cette équation à la solution générale de l'équation différentielle homogène associée.

3.4 Méthode de Lagrange

La méthode de Lagrange, aussi appelée méthode de variation de la constante, permet de déterminer une solution particulière d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, dès lors que l'on connait la forme générale des solutions de l'équation homogène associée.

On suppose donc que la solution générale de l'équation différentielle :

$$a\left(t\right)y' + b\left(t\right)y = c\left(t\right)$$

est donnée par $t \mapsto Ke^{F(t)}$, en posant $F\left(t\right) = \int -\frac{b(t)}{a(t)}\,dt$. On recherche alors une solution particulière de la forme $\varphi : t \mapsto K\left(t\right)e^{F(t)}$, où K est une fonction dérivable sur l'intervalle I de résolution. En effet, on a :

$$a\left(t\right)\varphi'\left(t\right) + b\left(t\right)\varphi\left(t\right) = c\left(t\right) \Leftrightarrow a\left(t\right)K'\left(t\right)e^{F(t)} = c\left(t\right) \Leftrightarrow K'\left(t\right) = \frac{c\left(t\right)e^{-F(t)}}{a\left(t\right)}$$

Il suffit d'intégrer cette dernière équation pour déterminer $K\left(t\right)$, ce qui permet d'obtenir $\varphi\left(t\right)$.

4 Equations difféntielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 8 *On appelle* ***équation différentielle linéaire du second ordre*** *à coefficients constants toute équation différentielle qui, après après réduction, se ramène à la forme*

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

où f est une fonction de la variable x, dérivable sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, $x \mapsto y$ une fonction inconnue (à déterminer) deux fois dérivable sur I, et a, b, c trois constantes réelles données.

Théorème 3 *Les solutions de cette équation sont la somme de l'une d'elles (solution particulière) avec les solutions de l'équation homogène associée :*

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \tag{EH'}$$

<u>Résolution de l'équation</u> $\quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$

On construit **l'équation caractéristique** :

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0}$$

On résout cette équation dans l'ensemble des complexes. Trois cas peuvent se produire :

– Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = \alpha + i\beta \text{ et } r_2 = \overline{r_1}$$

La solution générale de l'équation (EH') est alors définie par :

$$\boxed{x \mapsto e^{\alpha\, x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles arbitraires.

– Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique admet une racine double réelle : $r_1 = r_2 = \alpha$. La solution générale de l'équation (EH') est alors définie par

$$\boxed{x \mapsto (C_1 x + C_2)\, e^{\alpha\, x}}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles arbitraires.

– Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. La solution gé nérale de l'équation (EH') est alors définie par :

$$\boxed{x \mapsto C_1 e^{r_1\, x} + C_2 e^{r_2\, x}}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles arbitraires.