Fiche 1: Suites et séries

Suites

Exercice 1 :

Soit (u_n) une suite qui converge vers une limite l.
Démontrer l'unicité de la limite.

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n on a $u_n \geq n^2$.
   (b) En déduire la limite de la suite(u_n).
3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, et la démontrer.

Exercice 3 :

Démontrer que : *Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite.*

Séries

Exercice 4 :

Déterminer la nature des séries de terme général

1. $u_n = \frac{2^n+1}{3^n+15}$.
2. $v_n = \frac{(-1)^n}{2n+5}$.
3. $w_n = (-1)^n \sqrt{n} \sin(\frac{1}{n})$.

Exercice 5 :

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
   Montrer que si la série de terme général u_n est convergente, alors il en est de même pour la série de terme général u_n^2.
2. En est-il de même si la suite (u_n) n'est plus supposée à termes tous positifs.

Exercice 6 :

Soient $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{3n+1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{3}{(6n+1)(6n+4)}$.

1. Montrer que les séries de terme général (u_n) et (v_n) sont convergentes.
2. Calculer $u_{2n} + u_{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n$