# Éléments de théorie des ensembles

**Exercice 1 :**

1. Soit $E = \{a; b; c; d; e\}$ avec $a$, $b$, $c$, $d$ et $e$ distincts deux à deux. Démontrer que $\mathcal{P}(E)$ contient $2^5$ éléments et calculer $\mathcal{P}(E)$.
2. Soit $E$ un ensemble à deux éléments, calculer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

♡ **Exercice 2 :** Soit $E$ un ensemble et soient $A$, $B$, et $C$ trois parties de $E$. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $A \subset B \Rightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$.
2. $\complement_E \bar{A} = A$.
3. $(A \subset C$ et $B \subset C) \Rightarrow (A \cup B) \subset C$.
4. $(A \subset B) \Leftrightarrow (A = A \cap B)$.
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

♡ **Exercice 3 : Lois de De Morgan**

Soit $E$ un ensemble, $A$ et $B$ deux sous-ensembles de $E$, démontrer que :

1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
2. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

**Exercice 4 : Différence et différence symétrique**

1. Soit $E$ un ensemble, pour tous éléments $A$ et $B$ de $E$, on appelle différence de $A$ et $B$, l'ensemble noté
$$A \setminus B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \notin B\}$$
Démontrer que $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.
2. On appelle différence symétrique de $A$ et $B$, l'ensemble noté $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
Démontrer que $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (faites un dessin !).

**Exercice 5 :**

1. Pour tout entier naturel non nul $k$, on pose $A_k = [k-1\,; k+1]$ Calculer $\bigcup_{k=1}^{2008} A_k$ et $\bigcap_{k=1}^{2008} A_k$.
2. La famille $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant 2008}$ est-elle un système complet de l'intervalle $[0\,; 2008]$ ?
3. Donner un exemple de système complet de $\mathbb{R}$ puis un exemple de partition de $\mathbb{R}$.

♠ **Exercice 6 :** Décrire les ensembles suivants :

1. $\{a\,; b\} \times \{a\}$ $\quad a, b$ distincts.
2. $\{a\,; b\} \times \{a\,; b\}$ $\quad a, b$ distincts.
3. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
4. $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$.
5. $\mathbb{Z}^2$.
6. $\mathbb{R} \times \{0\}$.
7. $\mathbb{R}^3$.
8. $\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$.
9. $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^2$.

♡ **Exercice 7 :**

1. Soit $f$ une application de $E$ vers $F$, $A$ et $B$ deux parties de $E$. Démontrer que $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.
2. Soit $f$ une application de $E$ vers $F$, $A$ et $B$ deux parties de $F$. Démontrer que $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

**Exercice 8 :**

Soient $E$, $F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On considère $A_1$ et $A_2$ deux parties de $E$ et $B_1$ et $B_2$ deux parties de $F$.

1. Démontrer que :
$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2) \text{ et } f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$
2. Démontrer que :
$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \text{ et } f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

**Exercice 9 :** Préciser les ensembles de définition des fonctions $f$, $g$ et $f \circ g$ et calculer $f \circ g$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 1$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x^2 - 4$.
3. $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ et $g(x) = \sin x$.
5. $f(x) = \dfrac{2}{x}$ et $g(x) = \sin x$.
6. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ et $g(x) = 1 - x^2$.
7. $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$ et $g(x) = x^2$.
8. $f(x) = \dfrac{1}{|x - 2|}$ et $g(x) = e^x$.
9. $f(x) = \ln(x + 1)$ et $g(x) = x^2 - 1$.

**Exercice 10 :** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$.

1. Calculer $f([1\,;2])$, $f([-1\,;2])$, $f([-\frac{1}{2}\,;2])$ et $f([a\,;b])$ pour tous réels $a$ et $b$ tels que $a < b$.
2. Calculer $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$, $f^{-1}([1\,;+\infty[)$, $f^{-1}(]\pi\,;+\infty[)$, $f^{-1}(\{2;4\})$ et $f^{-1}(]-1\,;1])$.
3. Soit $g$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $g(x) = \frac{x-2}{x-1}$, déterminer $f(\mathbb{R}\setminus\{1\})$.

♡ **Exercice 11 :** Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles. Soit $f$ une application de $E$ vers $F$ et $g$ une application de $F$ vers $G$.

1. Démontrer que si $f$ et $g$ sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Démontrer que si $f$ et $g$ sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.

**Exercice 12 :** Les applications suivantes sont-elles injectives de $E$ vers $F$ ?

1. $E = \mathbb{R}_+$, $F = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
2. $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.
3. $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$, $f(x) = 3e^{2x}$.
4. $E = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $F = \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

**Exercice 13 :** Les applications suivantes sont-elles surjectives de $E$ vers $F$ ?

1. $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.
2. $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$.
3. $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}_+$, $f(x) = 3e^{2x}$.
4. $E = \mathbb{R}_+^*$, $F = \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

**Exercice 14 :** Soit $E$ un ensemble et $A$ une partie de $E$. On considère les applications $\varphi_A$ et $\psi_A$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définies par $\varphi_A(X) = A \cup X$ et $\psi_A(X) = A \cap X$.

1. À quelle condition $\varphi_A$ est-elle injective ? surjective ?
2. À quelle condition $\psi_A$ est-elle injective ? surjective ?

♡ **Exercice 15 :** Soit $f$ une application bijective de $E$ vers $F$, démontrer que $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$.

♡ **Exercice 16 :** Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles, $f$ une application de $E$ vers $F$ et $g$ une application de $F$ vers $G$.

1. Démontrer que si $f$ et $g$ sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective.
2. Démontrer que dans ce cas, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

♡ **Exercice 17 :** Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles, $f$ une application de $E$ vers $F$ et $g$ une application de $F$ vers $G$.

1. Démontrer que : $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
2. Démontrer que : $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
3. On suppose que $G = E$. Démontrer que si $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$ alors $f$ est bijective et $g = f^{-1}$.

**Exercice 18 :** Les applications suivantes sont-elles bijectives de $E$ sur $F$ ? Dans l'affirmative, déterminer l'application réciproque.

1. $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}_+$, $f(x) = 2e^{2x}$.
2. $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = 2e^{2x}$.
3. $E = \mathbb{R}^*$, $F = \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
4. $E = \mathbb{R}_+$, $F = \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$.

**Exercice 19 : Fonction caractéristique**
Soit $E$ un ensemble, $A$ et $B$ deux parties de $E$. On note $\chi_A$ la fonction caractéristique de $A$ définie sur $E$ et à valeurs dans $\{0\,;1\}$ par :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \notin A \\ 1, \text{ si } x \in A \end{cases}$$

1. Démontrer que $\chi_A^2 = \chi_A$.
2. Démontrer que $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$.
3. Démontrer que $\chi_{A\setminus B} = \chi_A(1 - \chi_B)$.
4. Démontrer que $A = B$ si, et seulement si $\chi_A = \chi_B$.
5. Démontrer à l'aide des fonctions caratéristiques que $A = B \Leftrightarrow (A \cap B = A \cup B)$.