

## PLANCHE 2 : fonctions usuelles

**Exercice 1 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 1 - \cos 3x + \cos 2x - 3 \cos x$$

1. Démontrer que  $f$  est une fonction paire et périodique de période  $2\pi$ .
2. Factoriser  $f(x)$ , et en déduire le signe de  $f(x)$  sur  $[0, \pi]$ .
3. Calculer  $f'(x)$ , et le factoriser. Démontrer qu'il existe un unique réel  $\alpha \in [0, \pi]$  tel que  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ . Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0, \pi]$ .

**Exercice 2 :** On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-1, 1]$  par :

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x$$

Déterminer l'expression de  $f'(x)$ , et en déduire l'expression de  $f(x)$ .

**Exercice 3 :** Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on définit la fonction  $\varepsilon$  par  $\varepsilon(x) = 1$  si  $x > 0$ ,  $\varepsilon(x) = -1$  si  $x < 0$  et  $\varepsilon(0) = 0$ . Prouver que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$ , on a

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \varepsilon(x) \frac{\pi}{2}$$

**Exercice 4 :** Calculer  $\arcsin(\sin x)$  pour :

1.  $\frac{19\pi}{2} \leq x \leq \frac{21\pi}{2}$
2.  $\frac{21\pi}{2} \leq x \leq \frac{23\pi}{2}$

**Exercice 5 :** Étudier et représenter la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

**Exercice 6 :** Résoudre les systèmes d'équations :

$$\text{a. } \begin{cases} \ln x + \ln y = -1 \\ \ln x - \ln y = 5 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x + \ln y = \ln 60 \end{cases}$$

**Exercice 7 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :

$$\begin{array}{ll} \text{a.} & \ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11) \\ \text{b.} & \ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x+11) \end{array}$$

**Exercice 8 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :

$$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \geq 0$$

**Exercice 9 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 2 = 0$$

**Exercice 10 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  le système d'équations :

$$\begin{cases} 5e^x - e^y = 19 \\ e^{x+y} = 30 \end{cases}$$