Probabilités

INFO1 - Semaines 15 à 24

Guillaume CONNAN

IUT de Nantes - Dpt d'informatique

Dernière mise à jour : 16 avril 2013

Sommaire

Sommaire

- expérience aléatoire
- univers
- évènement élémentaire
- évènement certain
- évènement impossible
- tribu
- mesurer a priori
- isomorphisme

- expérience aléatoire
- univers
- évènement élémentaire
- évènement certain
- évènement impossible
- tribu
- mesurer a priori
- isomorphisme

- expérience aléatoire
- univers
- évènement élémentaire
- évènement certain
- évènement impossible
- tribu
- mesurer a priori
- isomorphisme

- expérience aléatoire
- univers
- évènement élémentaire
- évènement certain
- évènement impossible
- tribu
- mesurer a priori
- isomorphisme

- expérience aléatoire
- univers
- évènement élémentaire
- évènement certain
- évènement impossible
- tribu
- mesurer a priori
- isomorphisme

- expérience aléatoire
- univers
- évènement élémentaire
- évènement certain
- évènement impossible
- tribu
- mesurer a priori
- isomorphisme

- expérience aléatoire
- univers
- évènement élémentaire
- évènement certain
- évènement impossible
- tribu
- mesurer a priori
- isomorphisme

- expérience aléatoire
- univers
- évènement élémentaire
- évènement certain
- évènement impossible
- tribu
- mesurer a priori
- isomorphisme

Sommaire

Définition 1 (Tribu)

Une tribu $\mathcal{T}_\Omega$ définie sur un univers Ω est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui vérifie :

1. $\Omega \in \mathcal{T}_\Omega$;
2. $A \in \mathcal{T}_\Omega \Longrightarrow \complement_\Omega A \in \mathcal{T}_\Omega$;
3. $\forall I \subseteq \mathbb{N},\ (A_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}_\Omega^{|I|} \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}_\Omega$.

Définition 1 (Tribu)

Une tribu $\mathcal{T}_\Omega$ définie sur un univers Ω est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui vérifie :

1. $\Omega \in \mathcal{T}_\Omega$;
2. $A \in \mathcal{T}_\Omega \Longrightarrow \complement_\Omega A \in \mathcal{T}_\Omega$;
3. $\forall I \subseteq \mathbb{N},\ (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T}_\Omega^{|I|} \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_\Omega$.

Définition 1 (Tribu)

Une tribu $\mathcal{T}_\Omega$ définie sur un univers Ω est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui vérifie :

1. $\Omega \in \mathcal{T}_\Omega$;
2. $A \in \mathcal{T}_\Omega \Longrightarrow \complement_\Omega A \in \mathcal{T}_\Omega$;
3. $\forall I \subseteq \mathbb{N},\ (A_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}_\Omega^{|I|} \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}_\Omega$.

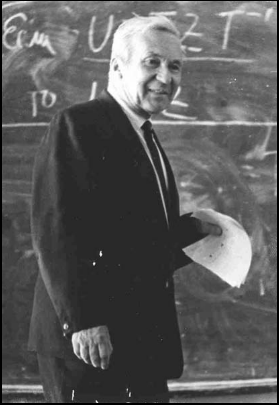
Définition 1 (Tribu)

Une tribu $\mathcal{T}_\Omega$ définie sur un univers Ω est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui vérifie :

1. $\Omega \in \mathcal{T}_\Omega$;
2. $A \in \mathcal{T}_\Omega \Longrightarrow \complement_\Omega A \in \mathcal{T}_\Omega$;
3. $\forall I \subseteq \mathbb{N},\ (A_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}_\Omega^{|I|} \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}_\Omega$.

Définition 2 (Espace probabilisable)

Soit $\mathcal{T}_\Omega$ une tribu définie sur l'univers Ω. On dit que $(\Omega, \mathcal{T}_\Omega)$ est un espace probabilisable (ou espace d'évènements). Les éléments de la tribu sont appelés **évènements**.



Андрей Николаевич
КОЛМОГОРОВ
(1903 - 1987)

Définition 3 (Axiomes de КОЛМОГОРОВ)

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur $\mathcal{T}$ vérifiant :

1. $\forall A \in \mathcal{T},\ \mathbb{P}(A) \in [0,1]$;
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
3. $\forall (A,B) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T},\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**.

Définition 3 (Axiomes de КОЛМОГОРОВ)

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur $\mathcal{T}$ vérifiant :

1. $\forall A \in \mathcal{T},\ \mathbb{P}(A) \in [0,1]$;
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
3. $\forall (A,B) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T},\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**.

Définition 3 (Axiomes de КОЛМОГОРОВ)

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur $\mathcal{T}$ vérifiant :

1. $\forall A \in \mathcal{T},\ \mathbb{P}(A) \in [0,1]$;
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
3. $\forall (A,B) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T},\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**.

Définition 3 (Axiomes de КОЛМОГОРОВ)

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. On appelle **mesure de probabilité** (ou probabilité tout court) une application Pr définie sur $\mathcal{T}$ vérifiant :

1. $\forall A \in \mathcal{T},\ \mathbb{P}(A) \in [0,1]$;
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
3. $\forall (A,B) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T},\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé**.

Équiprobabilité

Univers infini ?

Équiprobabilité

Univers infini ?

Théorème 4 (Principales propriétés)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. La probabilité* $\mathbb{P}$ *vérifie :*

1. $\mathbb{P}(\complement_\Omega A) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}, \; A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$;
4. $\forall (A, B) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}, \; \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ *(cas particulier de la formule du crible de Poincaré).*

Théorème 4 (Principales propriétés)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. La probabilité* $\mathbb{P}$ *vérifie :*

1. $\mathbb{P}(\complement_{\Omega} A) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T},\ A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$;
4. $\forall (A, B) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T},\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ *(cas particulier de la formule du crible de* Poincaré*).*

Théorème 4 (Principales propriétés)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. La probabilité* $\mathbb{P}$ *vérifie :*

1. $\mathbb{P}(\complement_\Omega A) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T},\ A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$;
4. $\forall (A, B) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T},\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ *(cas particulier de la formule du crible de* Poincaré*).*

Théorème 4 (Principales propriétés)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. La probabilité* $\mathbb{P}$ *vérifie :*

1. $\mathbb{P}(\complement_\Omega A) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
2. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$;
3. $\forall (A, B) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T},\ A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$;
4. $\forall (A, B) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T},\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ *(cas particulier de la formule du crible de* Poincaré*).*

Théorème 4 (Principales propriétés)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. La probabilité* $\mathbb{P}$ *vérifie :*

1. $\mathbb{P}(\complement_\Omega A) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
3. $\forall (A,B) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T},\ A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$;
4. $\forall (A,B) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T},\ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ *(cas particulier de la formule du crible de* Poincaré*).*

Définition 5 (Système complet d'évènements)

Une famille A_1, A_2,...,A_n d'évènements non vides de $\mathcal{T}$ forme un système complet d'évènements si, et seulement si :

- $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ (évènements incompatibles deux à deux) ;
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

On dit aussi que la famille (A_i) forme une **partition** de Ω.

Définition 5 (Système complet d'évènements)

Une famille A_1, A_2,...,A_n d'évènements non vides de $\mathcal{T}$ forme un système complet d'évènements si, et seulement si :

- $\forall i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ (évènements incompatibles deux à deux) ;
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

  On dit aussi que la famille (A_i) forme une **partition** de Ω.

Définition 5 (Système complet d'évènements)

Une famille A_1, A_2,...,A_n d'évènements non vides de $\mathcal{T}$ forme un système complet d'évènements si, et seulement si :

- $\forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset$ (évènements incompatibles deux à deux) ;
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

  On dit aussi que la famille (A_i) forme une **partition** de Ω.

Théorème 6 (Théorème des probabilités totales (version 1))

Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ un système complet d'évènements, alors :

$$\forall E \in \mathcal{T},\ \mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E \cap A_i)$$

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Définition 7 (Probabilité conditionnelle)

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé muni d'une probabilité $\mathbb{P}$, avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$. **La probabilité de A sachant B** est définie par

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Sommaire

Théorème 8 (Probabilités totales (version 2))

Supposons donc qu'il existe une partition A_1, A_2, … , A_n *de* Ω, *et soit* $B \in \mathcal{T}_\Omega$.

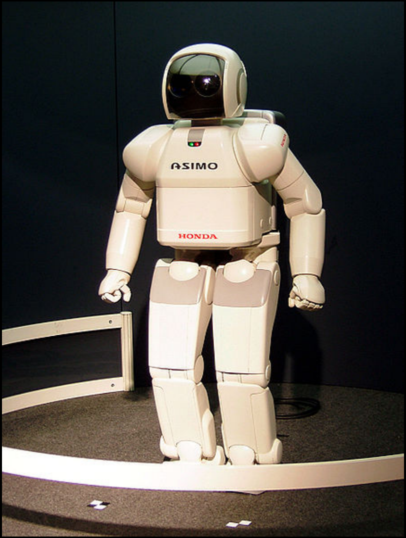
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \cdots + \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

Sommaire

Arbre

Sommaire

1702 - 1761


ASIMO
HONDA

Théorème 9 (Formule de Bayes)

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $(A_i)_{i\in I\subseteq\mathbb{N}}$ *un système complet d'évènements.*

$$\forall B \in \mathcal{T}, \quad \mathbb{P}_B(A_k) = \frac{\mathbb{P}_{A_k}(B) \times \mathbb{P}(A_k)}{\sum_{i\in I} \mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}$$

Poids de témoignage

$$Ev(p) = \log_2 \frac{p}{(1-p)}$$

Exprimé en bits

$$Ev(p) = 10\,\log_{10} \frac{p}{(1-p)}$$

Exprimé en dB

Sommaire

Définition 10 (Évènements indépendants)

Les évènements A et B sont dits **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

Théorème 11 (Indépendance et probabilités conditionnelles)

Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Les évènements A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$

Théorème 12 (Indépendance mutuelle)

Soit $(A_i)_{i \in I \subseteq \mathbb{N}}$ *une suite d'événements de* $\mathcal{T}$.

1. *On dit que ces événements sont* ***indépendants deux à deux*** *si, et seulement si :*

$$\forall (i,j) \in I^2, i \neq j, \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(A_j)$$

2. *On dit que ces événements sont* ***mutuellement indépendants*** *si, et seulement si, pour toute partie* J *de* I *on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Théorème 12 (Indépendance mutuelle)

Soit $(A_i)_{i\in I\subseteq\mathbb{N}}$ *une suite d'événements de* $\mathcal{T}$.

1. *On dit que ces événements sont* ***indépendants deux à deux*** *si, et seulement si :*

$$\forall(i,j)\in I^2, i\neq j, \mathbb{P}(A_i\cap A_j)=\mathbb{P}(A_i)\times\mathbb{P}(A_j)$$

2. *On dit que ces événements sont* ***mutuellement indépendants*** *si, et seulement si, pour toute partie J de I on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J}A_j\right)=\prod_{j\in J}\mathbb{P}(A_j)$$

Théorème 12 (Indépendance mutuelle)

Soit $(A_i)_{i \in I \subseteq \mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{T}$.

1. *On dit que ces événements sont **indépendants deux à deux** si, et seulement si :*

$$\forall (i,j) \in I^2, i \neq j, \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}(A_j)$$

2. *On dit que ces événements sont **mutuellement indépendants** si, et seulement si, pour toute partie J de I on a :*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Exercice 1

L'expérience aléatoire est le lancer de deux dés parfaits. Soit A_1 l'évènement « le premier dé donne un résultat pair », A_2 l'évènement « le deuxième dé donne un résultat pair » et A_3 l'évènement « la somme des numéros tirés est paire ».
Les évènements sont-ils mutuellement indépendants ? Deux à deux indépendants ?

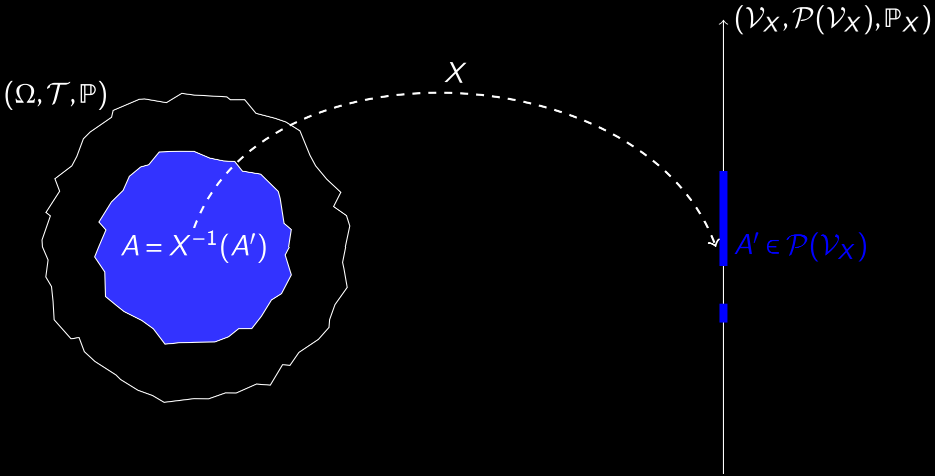
Sommaire

Sommaire

Définition 13 (Variable aléatoire réelle finie)

On appelle variable aléatoire réelle finie toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall I \subseteq \mathbb{R},\ X^{-1}(I) \in \mathcal{T}$$


$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$
$A = X^{-1}(A')$
X
$(\mathcal{V}_X, \mathcal{P}(\mathcal{V}_X), \mathbb{P}_X)$
$A' \in \mathcal{P}(\mathcal{V}_X)$

Sommaire

Définition 14 (Loi de probabilité d'une v.a.r.)

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On appelle **loi de probabilité** de X la fonction $\mathbb{P}_X$ de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie par

$$\mathbb{P}_X \ : \ x \longmapsto \mathbb{P}(\{X = x\})$$

$\mathbb{P}_X$ mesure de probabilité ?

Définition 14 (Loi de probabilité d'une v.a.r.)

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On appelle **loi de probabilité** de X la fonction $\mathbb{P}_X$ de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie par

$$\mathbb{P}_X \ : \ x \longmapsto \mathbb{P}(\{X = x\})$$

$\mathbb{P}_X$ mesure de probabilité ?

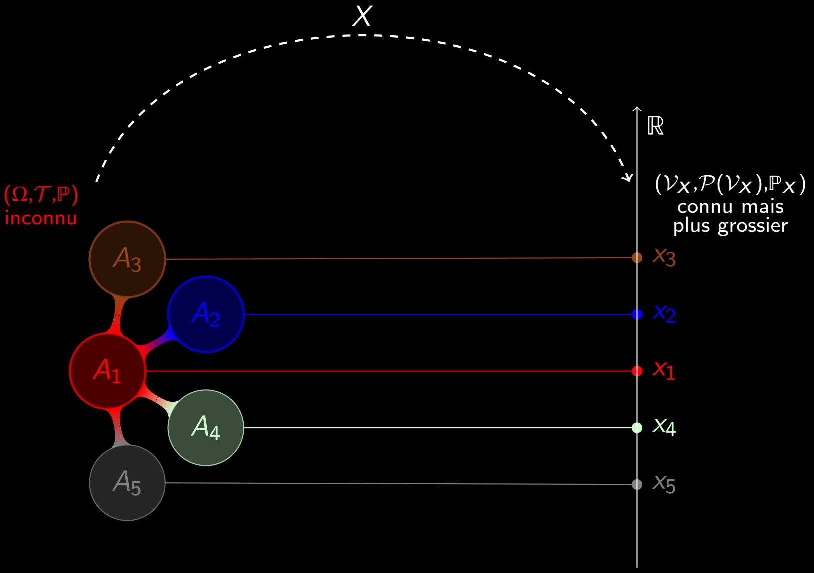
Définition 14 (Loi de probabilité d'une v.a.r.)

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On appelle **loi de probabilité** de X la fonction $\mathbb{P}_X$ de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie par

$$\mathbb{P}_X \ : \ x \longmapsto \mathbb{P}(\{X = x\})$$

$\mathbb{P}_X$ mesure de probabilité ?

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "X"] \arrow[d, swap, "\mathbb{P} \text{ inconnue}"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\mathbb{P}_X \text{ connue}"] \\
\mathbb{R} & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$


X
$\mathbb{R}$
$(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$
inconnu
$(\mathcal{V}_X, \mathcal{P}(\mathcal{V}_X), \mathbb{P}_X)$
connu mais
plus grossier
A_3
A_2
A_1
A_4
A_5
x_3
x_2
x_1
x_4
x_5

Attention !

Deux v.a.r. peuvent avoir la même loi sans être égales ! On lance n fois une pièce non truquée. Considérez X le nombre de pile tombés et $n - X$ le nombre de face.

Sommaire

Définition 15 (Couple de variables indépendantes)

Les v.a.r. X et Y sont dites indépendantes si, et seulement si, pour toute partie $(A,B) \in \mathcal{V}_X \times \mathcal{V}_Y$,

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B)$$

$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$

$\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = \mathbb{P}(X = x_i \text{ et } Y = y_j)$.

vecteur aléatoire $Z = (X, Y)$

$$\mathbb{P}(Z = (x_i, y_j)) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$
$\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = \mathbb{P}(X = x_i \text{ et } Y = y_j)$.
vecteur aléatoire $Z = (X, Y)$

$$\mathbb{P}(Z = (x_i, y_j)) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$

$\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = \mathbb{P}(X = x_i \text{ et } Y = y_j)$.

vecteur aléatoire $Z = (X, Y)$

$$\mathbb{P}(Z = (x_i, y_j)) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$
$\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = \mathbb{P}(X = x_i \text{ et } Y = y_j)$.
vecteur aléatoire $Z = (X, Y)$

$$\mathbb{P}(Z = (x_i, y_j)) = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

Définition 16 (Variables aléatoires mutuellement indépendantes)

Si $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_k$ sont k v.a. définies sur Ω, on dit qu'elles sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, quels que soient les intervalles $I_1, I_2, I_3, \cdots, I_k$ on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}\left(X_i^{-1}\left(I_i\right)\right)\right) = \prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}\left(X_i^{-1}\left(I_i\right)\right)$$

Sommaire

Définition 17 (Fonction de répartition)

Soit X une v.a.r. On appelle fonction de répartition de X la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \mathbb{P}(\{X \leqslant x\})$$

On note souvent cette fonction F_X.

Théorème 18 (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0,1]$
2. F_X est croissante (sens large).
3. F_X est continue à droite en tout point.
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
6. $\mathbb{P}(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$
7. $F_X(a) = \mathbb{P}(\{X \leq a\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X > a\})$
8. $\mathbb{P}(\{X = a\}) = \lim\limits_{x \to a^+} F_X(x) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x) = F_X(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$. Par conséquent en tout point a où F_X est continue on a $\mathbb{P}(\{X = a\}) = 0$.

Théorème 18 (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0,1]$
2. *F_X est croissante (sens large).*
3. *F_X est continue à droite en tout point.*
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
6. $\mathbb{P}(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$
7. $F_X(a) = \mathbb{P}(\{X \leq a\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X > a\})$
8. $\mathbb{P}(\{X = a\}) = \lim\limits_{x \to a^+} F_X(x) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x) = F_X(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$. *Par conséquent en tout point a où F_X est continue on a* $\mathbb{P}(\{X = a\}) = 0$.

Théorème 18 (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0,1]$
2. F_X *est croissante (sens large).*
3. F_X *est continue à droite en tout point.*
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
6. $\mathbb{P}(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$
7. $F_X(a) = \mathbb{P}(\{X \leq a\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X > a\})$
8. $\mathbb{P}(\{X = a\}) = \lim\limits_{x \to a^+} F_X(x) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x) = F_X(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$. *Par conséquent en tout point a où* F_X *est continue on a* $\mathbb{P}(\{X = a\}) = 0$.

Théorème 18 (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0,1]$
2. *F_X est croissante (sens large).*
3. *F_X est continue à droite en tout point.*
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
6. $\mathbb{P}(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$
7. $F_X(a) = \mathbb{P}(\{X \leq a\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X > a\})$
8. $\mathbb{P}(\{X = a\}) = \lim\limits_{x \to a^+} F_X(x) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x) = F_X(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$. *Par conséquent en tout point a où F_X est continue on a $\mathbb{P}(\{X = a\}) = 0$.*

Théorème 18 (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0,1]$
2. *F_X est croissante (sens large).*
3. *F_X est continue à droite en tout point.*
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
6. $\mathbb{P}(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$
7. $F_X(a) = \mathbb{P}(\{X \leq a\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X > a\})$
8. $\mathbb{P}(\{X = a\}) = \lim\limits_{x \to a^+} F_X(x) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x) = F_X(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$. *Par conséquent en tout point a où F_X est continue on a* $\mathbb{P}(\{X = a\}) = 0$.

Théorème 18 (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0,1]$
2. F_X *est croissante (sens large).*
3. F_X *est continue à droite en tout point.*
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
6. $\mathbb{P}(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$
7. $F_X(a) = \mathbb{P}(\{X \leq a\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X > a\})$
8. $\mathbb{P}(\{X = a\}) = \lim\limits_{x \to a^+} F_X(x) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x) = F_X(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$. *Par conséquent en tout point a où F_X est continue on a* $\mathbb{P}(\{X = a\}) = 0$.

Théorème 18 (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0,1]$
2. F_X *est croissante (sens large).*
3. F_X *est continue à droite en tout point.*
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
6. $\mathbb{P}(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$
7. $F_X(a) = \mathbb{P}(\{X \leq a\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X > a\})$
8. $\mathbb{P}(\{X = a\}) = \lim\limits_{x \to a^+} F_X(x) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x) = F_X(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$. *Par conséquent en tout point a où* F_X *est continue on a* $\mathbb{P}(\{X = a\}) = 0$.

Théorème 18 (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0,1]$
2. F_X *est croissante (sens large).*
3. F_X *est continue à droite en tout point.*
4. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
6. $\mathbb{P}(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$
7. $F_X(a) = \mathbb{P}(\{X \leq a\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X > a\})$
8. $\mathbb{P}(\{X = a\}) = \lim_{x \to a^+} F_X(x) - \lim_{x \to a^-} F_X(x) = F_X(a) - \lim_{x \to a^-} F_X(x)$. *Par conséquent en tout point* a *où* F_X *est continue on a* $\mathbb{P}(\{X = a\}) = 0$.

Théorème 18 (Propriétés de F_X)

1. $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) \in [0,1]$
2. F_X *est croissante (sens large).*
3. F_X *est continue à droite en tout point.*
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
6. $\mathbb{P}(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$
7. $F_X(a) = \mathbb{P}(\{X \leq a\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X > a\})$
8. $\mathbb{P}(\{X = a\}) = \lim\limits_{x \to a^+} F_X(x) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x) = F_X(a) - \lim\limits_{x \to a^-} F_X(x)$. *Par conséquent en tout point a où* F_X *est continue on a* $\mathbb{P}(\{X = a\}) = 0$.

Sommaire

Définition 19 (Espérance mathématique)

On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire X le nombre noté $\mathbb{E}(X)$ défini par

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \times \mathbb{P}(X = x_1) + x_2 \times \mathbb{P}(X = x_2) + \cdots + x_n \times \mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i)$$

Théorème 20 (Espérance de foX)

Soit X une v.a.r. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ X$ soit une v.a.r. Alors

$$\mathbb{E}(f \circ X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) \mathbb{P}(\{X = x_n\})$$

Cette propriété sera admise dans un premier temps.

Sommaire

Définition 21 (Variance)

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \mathbb{E}(X)\right)^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_i)$$

Définition 22 (Écart-type)

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Sommaire

Théorème 23 (Linéarité de l'espérance)

- $\mathbb{E}(aX+b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b) \times \mathbb{P}(X=x_i) = a\mathbb{E}(X)+b$
- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$

Théorème 23 (Linéarité de l'espérance)

- $\mathbb{E}(aX+b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b) \times \mathbb{P}(X = x_i) = a\mathbb{E}(X) + b$
- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

Théorème 23 (Linéarité de l'espérance)

- $\mathbb{E}(aX+b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)\times\mathbb{P}(X=x_i) = a\mathbb{E}(X)+b$
- $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$

Sommaire

Théorème 24 (Théorème de König-Huygens)

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

Sommaire

Définition 25 (V.a.r.c.r.)

Soit X une v.a.r. qui admet une variance non nulle. On appelle v.a.r. centrée réduite associée à X la v.a.r. :

$$X^{\star} = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

Cette définition en est-elle une ? Que valent $\mathbb{E}(X^{\star})$ et $\mathbb{V}(X^{\star})$?

Sommaire

Sommaire

Définition 26 (Loi uniforme)

On dit que $X : \Omega \longrightarrow [\![1, n]\!]$ suit une **loi uniforme** sur $[\![1, n]\!]$ si :

$$X(\Omega) = [\![1, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

Sommaire

Définition 27 (Loi de Bernoulli)

On dit que la v.a.r. finie X suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** si :

- $p \in]0;1[$, $X(\Omega) = \{0, 1\}$;
- $\mathbb{P}(X = 1) = p$.

On note alors $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, p)$

Définition 27 (Loi de Bernoulli)

On dit que la v.a.r. finie X suit la **loi de Bernoulli de paramètre *p*** si :

- $p \in]0;1[$, $X(\Omega) = \{0, 1\}$;
- $\mathbb{P}(X = 1) = p$.

On note alors $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, p)$

Définition 27 (Loi de Bernoulli)

On dit que la v.a.r. finie X suit la **loi de Bernoulli de paramètre *p*** si :

- $p \in]0\,;1[$, $X(\Omega) = \{0, 1\}$;
- $\mathbb{P}(X = 1) = p$.

On note alors $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, p)$

Sommaire

Définition 28 (Loi binomiale)

On dit que la v.a.r. finie X suit la **loi binomiale de paramètres *n* et *p*** si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $p \in]0;1[$, $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et si l'expérience est une suite de n expérience de Bernoulli de paramètre p menées indépendamment.
On note alors $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$

Problème du collectionneur

Problème du collectionneur

En Syldavie,le petit Ivan collectionne les images du chocolat Wonka. Il y a n images différentes. Lorsqu'il aura obtenu les n images, il aura droit de visiter les usines Wonka. À chaque fois qu'il achète une tablette, la probabilité d'obtenir une image quelconque est $1/n$. Soit T_n le temps d'attente (en nombre de tablettes achetées) pour obtenir les n images. Calculez $\mathbb{E}(T_n)$.

Avec

```
let  liste_entiers = fun min max ->
  let rec listentier = fun  m acc ->
    if m > max then
      acc
    else
      listentier (m + 1) (m :: acc)
  in listentier min [];;

let somme = fun plus zero f  n -> List.fold_left plus zero (List.
    map f
(liste_entiers 1 n));;
```

```
# 10. *. (somme (+.) (0.) (fun n -> 1./.(float_of_int n)) 10);;
- : float = 29.2896825396825378
```

Avec

```
let  liste_entiers = fun min max ->
  let rec listentier = fun  m acc ->
    if m > max then
      acc
    else
      listentier (m + 1) (m :: acc)
  in listentier min [];;

let somme = fun plus zero f  n -> List.fold_left plus zero (List.
    map f
(liste_entiers 1 n));;
```

```
# 10. *. (somme (+.) (0.) (fun n -> 1./.(float_of_int n)) 10);;
- : float = 29.2896825396825378
```

```
In [1]: 10 * sum(1 / k for k in range(1,11))
Out[1]: 29.289682539682538
```

Sommaire

Modèle : on répète indéfiniment une épreuve $\mathcal{E}$ de Bernoulli de probabilité de succès p.
Les répétitions étant mutuellement indépendantes, X désigne le rang de l'essai amenant le $r^{\text{Ème}}$ succès. On dit que X suit la loi de Pascal de paramètres r et p et on écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{P}a(r,p)$. On retiendra :

- $\mathcal{V}_X = \{r, r+1, r+2, r+3, \cdots\}$;
- $k \in \mathcal{V}_X, \mathbb{P}(\{X = k\}) = \mathcal{C}_{k-1}^{k-r} p^r (1-p)^{k-r}$;
- $\mathbb{E}(x) = \dfrac{r}{p}, \mathbb{V}(X) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.

Modèle : on répète indéfiniment une épreuve $\mathcal{E}$ de Bernoulli de probabilité de succès p.
Les répétitions étant mutuellement indépendantes, X désigne le rang de l'essai amenant le r^{Eme} succès. On dit que X suit la loi de Pascal de paramètres r et p et on écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{P}a(r,p)$. On retiendra :

- $\mathcal{V}_X = \{r, r+1, r+2, r+3, \cdots\}$;
- $k \in \mathcal{V}_X, \mathbb{P}(\{X = k\}) = \mathcal{C}_{k-1}^{k-r} p^r (1-p)^{k-r}$;
- $\mathbb{E}(x) = \dfrac{r}{p}, \mathbb{V}(X) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.

Modèle : on répète indéfiniment une épreuve $\mathcal{E}$ de Bernoulli de probabilité de succès p.
Les répétitions étant mutuellement indépendantes, X désigne le rang de l'essai amenant le $r^{\text{Ème}}$ succès. On dit que X suit la loi de Pascal de paramètres r et p et on écrit $X \rightsquigarrow \mathcal{P}a(r,p)$. On retiendra :

- $\mathcal{V}_X = \{r, r+1, r+2, r+3, \cdots\}$;
- $k \in \mathcal{V}_X, \mathbb{P}(\{X=k\}) = \mathcal{C}_{k-1}^{k-r} p^r (1-p)^{k-r}$;
- $\mathbb{E}(x) = \dfrac{r}{p}, \mathbb{V}(X) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$.

Sommaire

La variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ si X peut prendre toute valeur entière k avec la probabilité $\mathbb{P}(\{X = k\}) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

On retiendra aussi : $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

La variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ si X peut prendre toute valeur entière k avec la probabilité $\mathbb{P}(\{X = k\}) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.
On retiendra aussi : $\mathbb{E}(X) = \lambda$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda$.