# COLINÉARITÉ DANS UN REPÈRE
## Résolutions d'exercices accélérées par XCAS

**Compétences mathématiques :**

- Condition de colinéarité de deux vecteurs du plan muni d'un repère.

**Compétences informatiques :**

- Créer des fonctions, résoudre des équations, créer et utiliser des points et des vecteurs du plan.

**Le but**

Nous allons créer des outils de calcul qui colleront au plus près du cours de mathématiques et nous permettront de résoudre de nombreux exercices en se concentrant sur les nouvelles notions vectorielles sans nous perdre dans les calculs qu'effectura pour nous **XCAS**

### Partie 1: Exercice guidé

**L'énoncé**

Il s'agit de l'exercice 76 page 325 du Radial paru chez Belin, édition 2004.

**1. On considère les points** $A\left(-\frac{3}{2},2\right)$, $B\,(1,-2)$ **et** $C\left(3,\frac{1}{2}\right)$

On ouvre pour traiter l'exercice une fenêtre de géométrie en tapant simultanément sur Alt et p, puis on crée les points :

```
A:=point(-3/2,2);B:=point(1,-2);C:=point(3,1/2)
```

**2. On détermine les coordonnées du point D tel que ACBD soit un parallélogramme**

Pour cela, on pose $(x,y)$ les coordonnées cherchées de D et on sait que ACBD est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BD}$ par exemple. Ceci est équivalent au système :

$$\begin{cases} x_{\overrightarrow{CA}}=x_{\overrightarrow{BD}} \\ y_{\overrightarrow{CA}}=y_{\overrightarrow{BD}} \end{cases}$$

On obtient en fait deux équations (une par coordonnée) d'inconnues $x$ et $y$ qu'il s'agit de résoudre. On utilise pour cela la commande `resoudre(équation,[inconnues])` :

Pour nous faciliter la vie, nous allons construire une procédure `CV` qui donnera les coordonnées d'un vecteur défini par deux points :

```
CV(M,N):={coordonnees(vecteur(M,N))}:;
```

Il ne reste plus qu'à résoudre $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BD}$ :

```
resoudre(CV(C,A)=CV(B,point(x,y)),[x,y])
```

On obtient une liste contenant un seul couple solution qui correspond aux coordonnées de D.

Pour prendre le premier élément d'une liste `L`, on tape `L[0]` car **XCAS** commence à compter à partir de zéro !

Donc ici, on peut définir le point D comme le point dont les coordonnées sont le premier couple solution de l'équation, c'est-à-dire le numéro zéro :

```
D:=point(resoudre(CV(C,A)=CV(B,point(x,y)),[x,y])[0])
```

Le point s'affiche dans le repère et on a ses coordonnées exactes.

**3. Déterminez les coordonnées du point M défini par** $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Posons à nouveau $(x,y)$ les coordonnées inconnues du point M. On traduit directement l'équation vectorielle, presque telle quelle :

```
M:=point(resoudre(CV(A,point(x,y))=(2/3)*CV(A,C),[x,y])[0])
```

**4. Déterminez les coordonnées du point E, symétrique du point D par rapport au point M**

Cette fois, on définit le point E comme solution de l'équation vectorielle $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{ME}$ car M est le milieu du segment $[D,E]$ :

```
E:=point(resoudre(CV(D,M)=CV(M,point(x,y)),[x,y])[0])
```

**Remarque**

On aurait pu utiliser une commande **XCAS** toute faite : `E :=symetrie(M,D)`...mais c'est de la triche car on ne colle plus à notre cours et on laisse tout faire au logiciel.

**5. Déterminez les coordonnées du point N, milieu de [B,E]**

On peut par exemple définir le point N par $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BN}$ :

```
N:=point(resoudre(CV(B,E)=2*CV(B,point(x,y)),[x,y])[0])
```

**Remarque**

Là encore, on aurait pu utiliser une commande **XCAS** toute faite : `N :=milieu(B,E)`

**6. Démontrez que le point N appartient à la droite (AC)**

L'idée est d'utiliser la condition de colinéarité de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vue en cours. Pour cela, nous allons créer une fonction qu'on appellera par exemple `nemo` :

```
nemo(u,v):=abscisse(u)*ordonnee(v)-abscisse(v)*ordonnee(u)
```

Comme vous connaissez votre cours, vous savez que `nemo(u,v)` sera nul si, et seulement si, les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. Ici, cela donne :

```
nemo(vecteur(A,C),vecteur(A,N))
```

qui répond bien zéro, donc les points A, N et C sont bien alignés.

**7. Déterminez l'ordonnée du point P d'abscisse 4 qui appartient à la droite (DM)**

Vous devez savoir que le point P appartient à la droite (DM) si, et seulement si, les points M,D et P sont alignés, c'est-à-dire si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{DM}$ et $\overrightarrow{DP}$ sont colinéaires. Faisons donc encore appel à `nemo(u,v)` pour répondre à la question. Posons $(4, y)$ les coordonnées de P. Alors $y$ est solution de l'équation $\texttt{nemo}(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DP}) = 0$, ce qui s'écrit :

```
yp:=resoudre(nemo(vecteur(D,M),vecteur(D,point(4,y)))=0,y)[0]
```

Alors P peut être défini par :

```
P:=point(4,yp)
```

**8. Une touche esthétique**

Pour rendre notre figure plus jolie, mettons de la couleur :

```
couleur(quadrilatere(A,C,B,D),bleu+epaisseur_ligne_3)
couleur(segment(B,E),vert)
droite(D,M)
droite(A,C)
```

## Partie 2: À vous de jouer

Utilisez **XCAS** comme super-calculateur pour résoudre les exercices 77 à 81 de la même page.

## Partie 3: Avec un peu d'imagination

Nous avons vu en cours que le point $M$ de coordonnées $(x, y)$ appartient à la droite (AB) si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ étaient alignés.
Imaginez alors un moyen pour obtenir $y$ en fonction de $x$ à l'aide de `nemo`, `resoudre` et `vecteur`.
Pouvez-vous donner un nom à cette égalité ?