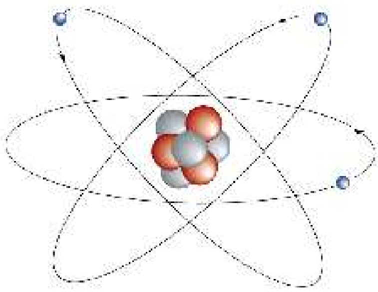
Cinquième Aventure

FRACTIONS RATIONNELLES



Résumé Nous allons découvrir dans ce chapitre des méthodes très utiles pour le calcul intégral et donc pour la physique. Malheureusement, ces techniques font appel à des notions assez compliquées, comme par exemple l'arithmétique des polynômes, que nous n'avons pas le temps d'étudier rigoureusement. Nous nous contenterons donc exceptionnellement de présenter ces techniques sans vraiment les démontrer : il vous faudra donc momentanément mettre de côté votre esprit critique et vous contenter de vous entraîner à reproduire des mécanismes.

I - POLYNÔMES

A - Définitions

A - 1 : Généralités

Théoriquement, un polynôme est une suite infinie de réels (ou de complexes) tous nuls à partir d'un certain rang. On les appelle les coefficients du polynôme. Par exemple,

$$(0,1,32,0,45,-1,5,0,0,0,...)$$

est un polynôme. Comme ce n'est pas très agréable et habituel de travailler sur de telles suites, on utilise des symboles pour rendre l'aspect plus convivial et faire le lien avec les fonctions polynomiales. Ainsi, le polynôme précédent est plutôt noté

$$0X^0 + 1X^1 + 32X^2 + 0X^3 + 45X^4 + (-1)X^5 + 5X^6$$

ou mieux

$$P = X + 32X^2 + 45X^4 - X^5 + 5X^6$$

Un polynôme quelconque s'écrit donc sous la forme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

L'ensemble des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[X]$. L'ensemble des polynômes à coefficients complexes est lui noté $\mathbb{C}[X]$.
Dans la suite, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note Θ le polynôme nul, c'est à dire (0,0,0,0,...)
Si $P \neq \Theta$, on note $\deg(P)$ le rang du dernier coefficient non nul de P.
Par convention, on posera $\deg(\Theta) = -\infty$.
On appellera les polynômes de degré 0 les polynômes constants : ils sont de la forme $P(X) = a_0$ avec a_0 un réel ou un complexe non nul.
On notera $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égale à n.
On appelle valuation de P le rang du premier coefficient non nul de P. Par convention on a $\mathrm{val}(\Theta) = +\infty$.
On appelle rigoureusement fonction polynôme associée à P la fonction $\widetilde{P}$

$$\widetilde{P} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \widetilde{P}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array}$$

Vous me direz : c'est quoi la différence, mis à part le fait qu'on a remplacé le X par un x ? À notre niveau, il n'y en a pas vraiment. Mais l'année prochiane, il faudra vous en souvenir au moment de travailler dans des espaces vectoriels de polynômes. Sachez pour votre culture générale que, par exemple, les informaticiens ne travaillent pas dans $\mathbb{C}$, mais dans un ensemble où il n'y a que des 0 et des 1. Dans cet ensemble, noté $\mathbb{F}_2$, on peut avoir $\widetilde{P_1} = \widetilde{P_2}$ mais $P_1 \neq P_2$. Mais on est pas là pour se culturer, on est là pour avoir une note pas trop mauvaise au DS, alors redescendons sur Terre. Dans la plupart des cas, on confondra polynôme et fonction polynômiale associée.

A - 2 : Opérations sur les polynômes

Considérons $P(X) = 2X + 1$ et $Q(X) = 1 + X - X^2$
On peut additionner des polynômes

$$P(X) + Q(X) = (P + Q)(X) = 2 + 3X - X^2$$

multiplier un polynôme par un scalaire

$$3 \times P(X) = (3 \cdot P)(X) = 6X + 3$$

multiplier deux polynômes

$$P(X) \cdot Q(X) = (P \cdot Q)(X) = 1 + 3X + X^2 - 2X^3$$

composer deux polynômes

$$P \circ Q(X) = P[Q(X)] = -2X^2 + 2X + 3 \qquad Q \circ P(X) = Q[P(X)] = -4X^2 - 2X + 1$$

On admettra les résultats suivants
- ▷ $\deg(P + Q) \leqslant \sup(\deg(P), \deg(Q))$
- ▷ $\deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

▷ $\deg(P \circ Q) = \deg(P) + \deg(Q)$

Si on note $P \cdot Q(X) = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$, on retiendra que

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Une dernière petite définition pour terminer : deux polynômes P et Q sont **associés** s'il existe un nombre $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda Q$.

B - Un peu d'arithmétique

B - 1 : Division euclidienne

Vous avez peut-être fait un peu d'arithmétique en Tale S, sinon, vous avez appris à diviser les entiers au plus tard en 6ème .
Par exemple, pour diviser 32 par 5, vous vous dites : « en 32 combien de fois 5 ? 6 fois et il reste 2 », ce qui donne

$$32 = 6 \times 5 + 2$$

avec 6 le diviseur, 6 le quotient et 2 le reste, le reste étant positif et strictement inférieur au diviseur (sinon, « il y va » une fois de plus).
Nous n'entrerons pas dans les détails, mais sachez qu'on peut également définir une division euclidienne des polynômes.

Théorème V-1 Division euclidienne de polynômes
Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $B \neq \Theta$. Alors il existe un unique couple (Q,R) de polynômes tels que

$$A = B \cdot Q + R \qquad \text{avec } \deg(R) < \deg(B)$$

Si $R = \Theta$, on dit que A est **divisible** par B.
C'est normalement la démonstration qui montre comment effectuer la division. Comme nous admettrons ce théorème, nous la découvrirons sur un exemple en nous inspirant de ce que nous faisions en 6ème .

$$\begin{array}{lr|l}
A & X^5 + X^4 - X^3 \qquad\quad + X - 1 & X^3 + X^2 + 2 \\
\cline{3-3}
BQ_1 & X^5 + X^4 \qquad + 2X^2 \qquad\qquad & \underbrace{X^2}_{Q_1} \; \underbrace{-1}_{Q_2} \\
A_1 = A - BQ_1 & . \qquad - X^3 - 2X^2 + X - 1 & \\
BQ_2 & . \qquad - X^3 - X^2 \qquad - 2 & \\
R = A_1 - BQ_2 & . \qquad\qquad - X^2 + X + 1 &
\end{array}$$

Cela veut donc dire que

$$X^5 + X^4 - X^3 + X - 1 = (X^3 + X^2 + 2)(X^2 - 1) - X^2 + X + 1$$

On a bien $R(X) = -X^2 + X + 1$, $\deg(R) = 2 < 3 = \deg(B)$.
Si $R = \Theta$, on dit que A est **dvisible** par B, ou que B divise A, ou encore que A est un multiple de B.
Comme pour les entiers, on peut parler de pgcd, de ppcm, mais nous n'en parlerons pas.
Par contre, vous connaissez les nombres premiers : ce sont les nombres entiers supérieurs à 2 qui ne sont divisibles que par 1 et eux-mêmes. Nous avons besoin d'une définition équivalente pour les polynômes : on les appelle les

B - 2 : Polynômes irreductibles

Définition V-1 Polynômes irréductibles
Un polynôme P est irréductible si
- ▷ $\deg(P) \geqslant 1$
- ▷ les seuls diviseurs de P sont 1, P, et leurs associés.

Cela revient à dire qu'un polynôme irreductible ne peut pas s'écrre sous la forme $P_1 \cdot P_2$ avec P_1 et P_2 des polynômes de degré supérieur ou égal à 1.
En particulier, tous les polynômes de degré 1 sont irréductibles.
Nous admettrons les résultats suivants (le premier est connu sous le nom de théorème de d'Alembert-Gauss)

Théorème V-2
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1

Théorème V-3
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont
- ▷ les polynômes de degré 1
- ▷ les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.

Par exemple, $P(X) = X^2 + 1 = (X - j)(X + j)$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X]$, mais il l'est dans $\mathbb{R}[X]$. Ainsi $\widetilde{(P)}$ s'annulera sur $\mathbb{C}$ en j et $-j$, mais ne s'annulera pas sur $\mathbb{R}$. Précisons les choses :
Vous aviez appris au collège à décomposer les entiers en prduit de facteurs premiers : par exemple $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$. Pour les polynômes, on admetra le résultat suivant :

Tout polynôme se décompose de manière unique en produit de facteurs irréductibles

Par exemple $(X^2 - 5X + 6) = (X - 3)(X - 2)$

B - 3 : Racines d'un polynôme

Définition V-2 Racine d'un polynôme
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
On dit que α est une racine de P (ou un zéro de P) lorsque $\widetilde{(}P)(\alpha) = 0$

Comme nous l'avons remarqué plus haut, nous identifierons par la suite P et $\widetilde{(}P)$.
Par exemple, vous savez depuis le lycée que $P(X) = X^2+1$ admet deux racines dans $\mathbb{C}$ et aucune dans $\mathbb{R}$. Généralisons ce résultat.

Propriété V-1
Le polynôme P est divisible par $(X - \alpha)$ si et seulement si α est une racine de P

Allez, juste une petite preuve pour le plaisir. Écrivons la division euclidienne de P par $X - \alpha$

$$P = (X - \alpha)Q + R \qquad \text{avec } \deg(R) < \deg(X - \alpha) = 1$$

donc R est un polynôme constant : on a $R = r$, avec $r \in \mathbb{K}$.
Donc $P(\alpha) = 0 \times Q + r = r$ et $P(\alpha) = 0$ si et seulement si $r = 0$, c'est à dire si et seulement si $(X - \alpha)$ divise P.

Propriété V-2
Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.

En effet, puisque les seuls polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1, tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 : tout polynôme non constant peut donc s'écrire sous la forme $(X - a)Q$ qui admet donc au moins une racine a.

B - 4 : Division selon les puissances croissantes

Nous utiliserons cette méthode avec parcimonie car sa preuve fait appel à deux nombreux résultats d'arithmétique et que son utilisation est assez lourde. Nous la découvrirons à travers un exemple.
Nous verrons dans la section suivante qu'il peut être utile d'écrire un polynôme A sous la forme

$$A = BS + X^{p+1}T \qquad \text{avec } \deg(S) \leqslant p$$

le polynôme B étant donné et devant être obligatoirement de valuation 0 (en gros, le coefficient de X^0 est non nul).
Cela donne pour $A = 1 - 2X + X^3 + X^4$ et $B = 1 + X + X^2$ à l'ordre $p = 2$

$$
\begin{array}{lll|l}
A & 1-2X & +X^3\ +X^4 & 1+X+X^2 \\
\cline{4-4}
BQ_1 & 1+X\ +X^2 & & 1-3X-2X^2 \\
A-BQ_1 & .\ -3X-X^2+X^3\ +X^4 & & Q_1\ \ Q_2\ \ \ Q_3 \\
BQ_2 & .\ -3X-3X^2-3X^3 & & \\
A-BQ_1-BQ_2 & . & 2X^2+4X^3+X^4 & \\
BQ_3 & . & 2X^2+2X^3+2X^4 & \\
A-BQ_1-BQ_2-BQ_3 & . & 2X^3-X^4 &
\end{array}
$$

On a donc $A = \underbrace{(1-3X+2X^2)}_{S} B + \underbrace{(2-X)}_{T} X^3$

II - FRACTIONS RATIONNELLES

A - Définitions

A - 1 : $\mathbb{K}(X)$

Nous ne pouvons pas rentrer dans les détails techniques et rigoureux de l'algèbre générale. Retenez seulement que

Définition V-3
On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles sur $\mathbb{K}$, c'est à dire qui s'écrivent sous la forme

$$F(X) = \frac{A(X)}{B(X)}$$

avec $A \in \mathbb{K}[X]$, $B \in \mathbb{K}[X]$ et $B \neq \Theta$

Par exemple, $F(X) = \dfrac{X^3-3X+1}{X^2-1}$ est une fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais on a aussi $F(X) = \dfrac{(X^3-3X+1)(X+1)}{(X^2-1)(X+1)}$ comme on a $3/2 = 6/4$. Sans pouvoir définir la notion (car elle fait appel au pgcd de deux polynômes et à la notion de polynômes premiers entre eux), on essaiera de parler de forme irréductible d'une fraction comme d'une forme « dont on ne peut pas simplifier plus l'écriture... » if you see what I mean. On peut aussi dire que $F = A/B$ est sous forme irréductible lorsque A et B n'ont pas de facteur commun.
Comme pour les polynômes, on devrait distinguer les fractions rationnelles F des fonctions rationnelles associées $\widetilde{F}$, mais on ne le fera pas car c'est inutile à notre niveau.

A - 2 : Degré d'une fraction rationnelle

Comme pour les polynômes, on aura besoin de parler de degré

Définition V-4

Étant donné une fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B}$, on appelle degré de F et on note $\deg(F)$

$$\deg(F) = \deg(A) - \deg(B)$$

A - 3 : Pôles et zéros

Définition V-5

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ et deux polynômes A et B tels que $F = A/B$ soit une forme irréductible de F. On appelle

▷ PÔLES de F les racines de B

▷ ZÉROS de F les racines de A

Par exemple $F(X) = \dfrac{X+32}{X^2-1}$ admet pour pôles -1 et 1 et pour zéro -32.

A - 4 : Partie entière d'une fraction rationnelle

Nous admettrons le résultat suivant

Théorème V-4

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique **polynôme** $E \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\deg(F - E) < 0$$

On appelle E la partie entière de F

Cela veut dire qu'on peut écrire de manière unique toute fraction sous la forme $F = E + \dfrac{R}{B}$ avec $\deg\left(\dfrac{R}{B}\right) = \deg(R) - \deg(B) < 0$, c'est à dire d'un polynôme plus une fraction de degré négatif (le degré du numérateur est plus petit que le degré du dénominateur).

Le mot partie entière vous rappelle quelque chose : par exemple $\dfrac{7}{2} = 3 + \dfrac{1}{2}$ avec 3 un entier et $1 < 2$.

Pour les fractions rationnelles, la division euclidienne nous permet d'obtenir la partie entière.

Par exemple, nous avons vu précédemment que $X^5 + X^4 - X^3 + X - 1 = (X^3 + X^2 + 2)(X^2 - 1) - (X^2 - X - 1)$ et donc que

$$\frac{X^5 + X^4 - X^3 + X - 1}{X^3 + X^2 + 2} = X^2 - 1 - \frac{X^2 - X - 1}{X^3 + X^2 + 2}$$

En effet, la division euclidienne de A par B s'écrit

$$A = B \cdot Q + R \qquad \text{avec } \deg(R) < \deg(B)$$

c'est à dire

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B} \qquad \text{avec } \deg\left(\frac{R}{B}\right) < 0$$

, et donc le quotient de la division euclidienne de A par B est bien la partie entière de A/B.

B - Décomposition en éléments simples

B-1 : Structure de la décomposition

Notre fraction F s'écrivant sous la forme $E + R/B$, le E nous intéresse car c'est un polynôme qu'on sait intégrer. Pour la partie R/B, qu'on appelle la **partie polaire**, ce n'est pas toujours évident d'en trouver une primitive. Pour nous aider, on va la décomposer en éléments simples, c'est à dire simplement intégrables. Travaillons par la suite dans $\mathbb{R}(X)$, car nous travaillerons sur des intégrales de fonctions réelles.

Rappelons un résultat important : dans $\mathbb{R}[X]$, tout polynôme B peut s'écrire sous forme de produit de facteurs irréductibles, c'est à dire

$$B(X) = a\,(X - r_1)^{m_1} \cdots (X - r_p)^{m_p}(X^2 + b_1X + c_1)^{n_1} \cdots (X^2 + b_qX + c_q)^{n_q}$$

Les r_i étant les pôles de F.

On appelle **éléments simples de 1$^{\text{ère}}$ espèce** relatifs aux pôles r_i, les p fonctions rationnelles du type

$$\frac{A_1}{x - r_i}\ ,\ \frac{A_2}{(x - r_i)^2}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{A_{m_i}}{(x - r_i)^{m_i}}\ ,$$

où les A_k sont des constantes réelles.

On appelle **éléments simples de 2$^{\text{ème}}$ espèce** relatifs aux polynômes irréductibles $X^2+b_jX+c_j$, les q fonctions rationnelles du type

$$\frac{B_1\,x + C_1}{x^2 + b_jx + c_j}\ ,\ \frac{B_2\,x + C_2}{(x^2 + b_jx + c_j)^2}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{B_{n_j}\,x + C_{n_j}}{(x^2 + b_jx + c_j)^{n_j}}\ ,$$

où les B_k,C_k sont des constantes réelles.

Voyons ce que cela donne sur un exemple. Considérons

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{x^3 - 21\,x - 7}{(x + 2)(x - 1)^2(x^2 + x + 1)}$$

▷ éléments simples de 1$^{\text{ère}}$ espèce :

- le pôle $x = 1$ de multiplicité 2 $\rightsquigarrow$ 2 éléments simples :

$$\frac{A_1}{x - 1}\ ,\ \frac{A_2}{(x - 1)^2}\ ,$$

- le pôle $x = -2$ de multiplicité $1 \rightsquigarrow 1$ élément simple

$$\frac{A_3}{x+2}$$

▷ éléments simples de 2ème espèce : 1 seul, associé au facteur irreductible $x^2 + x + 1$

$$\frac{B_1\,x + C_1}{x^2 + x + 1}$$

Attention ! il faut toujours d'abord s'assurer de la décomposition complète du dénominateur! Par exemple, $B(x)$ aurait pu être écrit comme $B(x) = (x-1)(x+2)(x^3-1)$ ce qui ne permet pas de voir immédiatement les éléments simples.

Nous admettrons alors le théorème suivant

Théorème V-5

Soit $f(x) = A(x)/B(x)$ une fraction rationnelle irréductible. Alors

▷ Si $A = BQ + R$, $\deg R < \deg B$ (div.euclidienne de A par B), on a $f = \dfrac{A}{B} = Q + \dfrac{R}{B}$.

▷ $\dfrac{R}{B}$ se décompose de manière unique en somme de tous les éléments simples relatifs à B. Pour vous faire très peur, voici la formule qui tue

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \sum_i \sum_k \frac{A_{ik}}{(x - r_i)^k} + \sum_j \sum_\ell \frac{B_{jk}\,x + C_{jk}}{(x^2 + b_j x + c_j)^k}$$

Pour reprendre notre exemple, la structure de la décomposition en éléments simples de $R(x)/B(x)$ est

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{x^3 - 21\,x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + + \frac{A_3}{x+2} + \frac{B_1\,x + C_1}{x^2+x+1}$$

Maintenant, le plus dur reste à faire : calculer les coefficients de la décomposition.

B - 2 : Calculs des coefficients de la décomposition

B - 2 - a : Préliminaire : cas d'un pôle simple

Supposons que F admette un pôle simple r, alors

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x-r)Q_1(x)} = \frac{\alpha}{x-r} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

d'après ce qui précède, en remarquant que r n'est pas une racine de Q_1, sinon, ce serait un pôle multiple de F.

On en déduit que

$$\alpha = (x-r)\left(F(x) - \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right) = \frac{P(x)}{Q_1(x)} - (x-r)\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Comme r n'est pas une racine de Q_1, les fractions P/Q_1 et P_1/Q_1 sont définies en r. On peut donc remplacer x par r dans l'expression précédente et on obtient

$$\alpha = \frac{P(r)}{Q_1(r)}$$

Mettons cela en pratique :

B - 2 - b : Cas où la fraction ne présente que des pôles simples

$$\mathrm{F}(x) := \frac{5\,x - 29}{(x+3)\,(x-8)}$$

$F(x)$ présente deux pôles simples : -3 et 8 . La forme de sa décomposition est donc :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\alpha}{x+3} + \frac{\beta}{x-8}$$

Je pose : $P(x) = 5x - 29$, $Q_1(x) = x - 8$ et $Q_2(x) = x + 3$ et j'obtiens :

$$\alpha = \frac{\mathrm{P}(-3)}{Q_1(-3)} = 4$$

$$\beta = \frac{\mathrm{P}(8)}{Q_2(8)} = 1$$

Bilan :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{4}{x+3} + \frac{1}{x-8}$$

B - 2 - c : La division selon les puissances croissantes pour les pôles multiples

Soit $\mathrm{F}(x) = \dfrac{\mathrm{P}(x)}{(x-a)^n\,\mathrm{Q}(x)}$ une fraction présentant a comme pôle d'ordre n ($2 \leq n$) . Alors il existe n nombres λ_1, λ_2 ... λ_n et un polynôme $P_1(x)$ tels que :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\lambda_1}{(x-a)^n} + \frac{\lambda_2}{(x-a)^{(n-1)}} + \cdots + \frac{\lambda_n}{x-a} + \frac{P_1(x)}{\mathrm{Q}(x)}$$

Pour trouver ces nombres et ce polynôme on procède en utilisant le changement de variable

$$h = x - a$$

puis on opère une division suivant les puissances croissantes du numérateur par $\mathrm{Q}(h+a)$ à l'ordre $n-1$.

Les nombres λ_i apparaissent dans le quotient de cette division, et le polynôme dans le reste comme le montre une simple division et un retour à la variable x.
Exemple :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{38\,x + 30 + 2\,x^3 + 15\,x^2}{(x+2)^3\,(x+1)}$$

$F(x)$ présente -2 comme pôle triple , -1 comme pôle simple.
La forme de la décomposition de $F(x)$ est donc :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\alpha}{(x-2)^3} + \frac{\beta}{(x+2)^2} + \frac{\gamma}{x+2} + \frac{\delta}{x+1}$$

Je fais dans $F(x)$ le changement de varriable $x = h - 2$

$$\mathrm{F}(h-2) = \frac{2\,h - 2 + 2\,h^3 + 3\,h^2}{h^3\,(h-1)}$$

Je divise le numérateur obtenu par $h-1$ suivant les puissances croissantes à l'ordre $2 = 3-1$ (3 est l'ordre de -2 comme pôle de la fraction). J'obtiens :

$$2\,h - 2 + 2\,h^3 + 3\,h^2 = (h-1)\,(2 - 3\,h^2) + 5\,h^3$$

Pour revenir à $F(h-2)$ je divise les deux membres de cette égalité par $h^3\,(h-1)$ ce qui me donne aussitôt

$$\mathrm{F}(h-2) = \frac{2}{h^3} - \frac{3}{h} + \frac{5}{h-1}$$

Je pose $h = x + 2$ ce qui me donne :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{2}{(x+2)^3} - \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x+1}$$

Terminé ! A noter, $\lambda_2 = 0$, ça arrive !

B - 2 - d : Autres méthodes

On peut souvent se débrouiller autrement : parité, limite en l'infini, valeurs particulières.

▷ **Méthode des limites**
Cette méthode consiste à multiplier d'abord par la plus basse puissance qui intervient dans la décomposition en éléments simples, et de prendre la limite $x \to \infty$ (où il suffit de garder les puissances les plus élevées). Ainsi, on a dans le membre de droite la somme des coefficients qui correspondent à cette puissance, qui permet de déterminer un coefficient en terme des autres.
Exemple : Considérons

$$F(x) = \frac{x^3 - 21\,x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+2} + \frac{B_1\,x + C_1}{x^2+x+1}$$

On multiplie par x, la limite donne alors

$$\lim \frac{x^4}{x^5} = 0 = A_1 + A_3 + B_1$$

et donc $B_1 = -A_1 - A_3 = -2 - 1 = -3$

▷ **Méthode des valeurs particulières**

Une autre méthode consiste à simplement prendre des valeurs particulières pour x (différents des pôles) et ainsi d'avoir un système d'équations qui permettra de déterminer les coefficients manquants.

Exemple En gardant notre exemple, prenons $x = 0$:

$$\frac{-7}{2} = -A_1 + A_2 + \frac{A_3}{2} + C_1$$

et donc

$$C_1 = -\frac{7}{2} + A_1 - A_2 - \frac{A_3}{2} = -\frac{7}{2} + 2 + 3 - \frac{1}{2} = -4 + 5 = 1$$

Remarque : dans le cas général, il faut ainsi créer un système d'autant d'équations (indépendantes) qu'il reste de coefficients à déterminer.

▷ **Par identification**

La méthode générique qui marche toujours mais qui n'est pas toujours pas la plus rapide, consiste à réécrire la somme des éléments simples sur le dénominateur commun qui est $B(x)$, et d'identifier les coefficients des mêmes puissances de x du membre de gauche (coefficients de $R(x)$) et du membre de droite (les A,B,C multipliés par une partie des facteurs de $B(x)$).

Ainsi on obtient un système d'équations linéaires dont la solution donne les coefficients (manquants).

B - 2 - e : Résumé

Nous verrons cela en TD. Retenez malgré tout le schéma suivant

Pratique de la décomposition

Soit G la fraction à décomposer

1) On détermine la partie entière à l'aide d'une division euclidienne. Soit H cette partie, on pose F = G−H.
2) On détermine les pôles de F avec leur ordre de multiplicité et on dresse la liste des diviseurs primaires du dénominateur.
3) On écrit la forme de la décomposition de F dans R (étape indispensable et capitale!).
4) On choisit la méthode que l'on va appliquer en s'interrogeant sur la pertinence des techniques de base vues plus haut. On consultera l' annexe pour voir quelques autres méthodes intéressantes qui peuvent etre mises en oeuvre dans certains cas, assez nombreux. On peut aussi pratiquer la méthode par identification. La méthode par divisions euclidiennes (successives le cas échéant) donne des résultats rapides pour les fractions dont le dénominateur est de la forme $(a\,x^2 + b\,x + c)^k$ avec un discriminant négatif. Un examen de la parité permet, lorsque la fraction est paire ou impaire, de réduire le nombre d'inconnues recherchées par identification.
5) Une fois F décomposée, on revient à G en lui ajoutant H !