# T$^{\text{ale}}$ STL2 Fonction exponentielle

.

## Exercice 1

La désintégration radioactive du Zirconium 95 se fait en deux étapes : formation de Niobium (Nb) puis transformation qui conduit à un isotope stable. On s'intéresse à l'évolution du $^{95}$Nb en fonction du temps.

À l'instant $t$ (exprimé en jours), on note $N(t)$ le nombre d'atomes de $^{95}$Nb.

On admet que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, l'expression de $N(t)$ est :

$$N(t) = 200\left(\mathrm{e}^{-0,01t} - \mathrm{e}^{-0,02t}\right).$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction N dans un repère orthogonal d'unités graphiques :

1 cm pour 10 jours sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

**1.** Calculer $N(0)$.

**2.** a) Calculer la limite de $N(t)$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

b) Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ ?

**3.** a) Montrer que la fonction $N'$ dérivée de N vérifie

$$N'(t) = 200\mathrm{e}^{-0,02t}\left(0,02 - 0,01\mathrm{e}^{0,01t}\right).$$

b) Résoudre l'équation $N'(t) = 0$.
Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à $10^{-1}$ près de la solution $t_0$ de cette équation.

c) Résoudre dans $[0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $N'(t) \geqslant 0$.
En déduire le tableau de variations de la fonction N. Préciser la valeur exacte de $N\left(t_0\right)$.

**4.** Construire la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0\,;\,150]$.

**5.** Déterminer graphiquement l'intervalle de temps pour lequel $N(t) \geqslant 40$.
(On laissera apparaître sur la figure les constructions utiles).

## Exercice 2

On étudie l'évolution d'une culture bactérienne en fonction du temps. On estime que le nombre de bactéries en milliards par ml est donné, à chaque instant $t$ (exprimé en heures) par la fonction $f$ définie sur $[0\,;\,24]$ par

$$f(x) = (3t+1)\mathrm{e}^{-0,15t}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 0,5 cm pour une heure sur l'axe des abscisses et 2 cm pour un milliard par ml sur l'axe des ordonnées).

**1.** a) Montrer que la dérivée $f'$ de $f$ est telle que $f'(t) = (2,85 - 0,45t)\mathrm{e}^{-0,15t}$.

b) Étudier le signe de $f'(t)$. Dresser le tableau de variations de $f$.

**2.** a) Reproduire et compléter le tableau suivant (les résultats seront donnés à $10^{-2}$ près).

b) Calculer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A d'abscisse 0.

c) Tracer T et $(\mathscr{C})$ dans le repère donné.

**3.** À l'aide du graphique, et en faisant apparaître les constructions nécessaires, déterminer à une heure près les valeurs de $t$ pour lesquelles il y a 5 milliards de bactéries par ml.

## Exercice 3

On considère la fonction $f$ détinie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3\mathrm{e}^{4x} - 1}{\mathrm{e}^{4x} + 1}.$$

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan (unité graphique 5 cm).

**1.** Etudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variations sur $[0\ ;\ +\infty[$.

**2.** Calculer la limite de $f$ en $+\infty$ $\left(\text{on pourra montrer que } f(x) = \dfrac{3 - \mathrm{e}^{-4x}}{1 + \mathrm{e}^{-4x}}\right)$.

**3.** Donner les valeurs approchées à $10^{-2}$ près de $(x)$ pour les valeurs suivantes de $x$ : 0 ; 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ;0,8 ; 1 ; 1,2 et 1,4.

**4.** Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

**5.** Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et sa tangente T.

**6.** Montrer que $f(x) = \dfrac{3\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-x}}$.
On considère la fonction F définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$\mathrm{F}(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{-x}\right) + 1.$$

Montrer que $f$ est la dérivée de F sur $[0\ ;\ +\infty[$.

## Exercice 4

On injecte dans le sang 100 mg d'un médicament A.
Pendant l'élimination naturelle, la dose restant dans le sang à l'instant $t$ est donnée en mg par la fonction $f$ définie par :

$$f(t) = 100\mathrm{e}^{-0,4t}$$

où $t$ est exprimé en heure.

**Partie A**

Étude de la fonction $f$ sur $[0\ ;\ +\infty[$

**1.** Calculer la limite de $f$ en $+\infty$.

**2.** Calculer $f'(t)$ et justifier son signe.

**3.** Dresser le tableau de variations de $f$.

**4.** On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentant $f$ dans un repère orthogonal (unites : 1 cm pour 1 h en abscisse et 1 cm pour 10 mg en ordonnée). Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ de $f$ au point A d'abscisse 0.

**Partie B**

On injecte une deuxième dose de 100 mg huit heures après la première.

**1.** Calculer la dose totale dans le sang juste après cette deuxième injection.

**2.** La dose restant dans le sang après la deuxième injection est donnée en mg par la fonction $g$ définie sur $[8\ ;\ +\infty[$ par

$$g(t) = 100\mathrm{e}^{-0,4t}\left(1 + \mathrm{e}^{3,2}\right)$$

où $t$ est exprimé en heure.
Tracer T et $\mathscr{C}$ sur $[0\ ;\ 8]$ puis la courbe $\mathscr{C}'$ représentative de $g$ sur $[8\ ;\ 16]$.

**Partie C**

On répondra aux questions suivantes par lecture graphique.

On considère que le médicament est efficace lorsque la dose restant dans le sang est supérieure à 20 mg.

**1.** Au bout de combien de temps la première injection perd-elle son effet ?

**2.** Sur quels intervalles de temps le médicament agit-il ?

## Exercice 5

Une réserve d'eau naturelle est aménagée pour la baignade. Un système d'évacuation permet de maintenir dans ce bassin, en toutes circonstances, un volume d'eau constant égal à 50 000 litres. À la suite de pluies torrentielles, des eaux de ruissellement, polluées par des pesticides, se déversent dans ce bassin.

On a déterminé le volume $y_i$ (en litres) de pesticides contenus dans le bassin à l'instant $t_i$ (exprimé en heures). Les résultats figurent dans le tableau suivant :

| $t_i$ | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 0 | 173 | 375 | 502 | 688 | 778 |

On pose $z_i = -7 + \ln(2000 - y_i)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

**1.** Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en donnant les valeurs de $z_i$ à $10^{-2}$ près.

| $t_i$ | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z_i$ | | | 0,39 | | | |

**2.** Dans un repère orthogonal $\left(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, représenter le nuage de points $\text{M}_i(t_i,\ z_i)$.
(On prendra 0,1 cm pour unité en abscisses, et 20 cm pour unité en ordonnées).

**3.** a) Calculer les coordonnées du point moyen $\text{G}_1$ des trois premiers points du nuage et celles du point moyen $\text{G}_2$ des trois derniers points du nuage.

b) Placer les points $\text{G}_1$ et $\text{G}_2$ sur le graphique et tracer la droite $(\text{G}_1\text{G}_2)$.

c) Déterminer une équation de la droite $(\text{G}_1\text{G}_2)$.

**4.** On considère que la droite $(\text{G}_1\text{G}_2)$ constitue un ajustement affine convenable du nuage de points $\text{M}i(t_i,\ z_i)$. À l'aide du résultat obtenu en **3. c.**, montrer que l'on peut choisir comme expression approchée de $y$ en fonction de $t$ :

$$y = 2000\left(1 - \text{e}^{-0{,}005t}\right).$$

**5.** La baignade devient dangereuse dès que le taux de pesticides contenus dans l'eau atteint 2 %.

a) Pour quel volume de pesticides ce taux est-il atteint ?

b) Résoudre l'inéquation :

$$2000\left(1 - \text{e}^{-0{,}005t}\right) \geqslant 1000.$$

c) En déduire au bout de combien de jours la baignade sera dangereuse (on arrondira le résultat à l'entier le plus proche).

d) Comment peut-on vérifier graphiquement ce résultat ?

## Exercice 6

Le but de l'exercice est la détermination puis l'étude de quelques propriétés d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la représentation graphique $(\mathscr{C})$, ainsi que la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0, figurent ci-dessous.

### Partie A : détermination de la fonction $f$

**1.** À l'aide du graphique, déterminer $f(0)$ et $f'(0)$, où $f'$ désigne la dérivée de la fonction $f$.

**2.** On suppose que l'expression de $f$ est donnée pour tout nombre réel $x$ par :

$$f(x) = \alpha + \beta x e^{-x}, \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des nombres que l'on se propose de déterminer.}$$

a) En utilisant un résultat du **1)** déterminer la valeur de $\alpha$.

b) Démontrer que, pour tout nombre réel $x$, $f'(x) = \beta e^{-x}(1-x)$.
À l'aide de l'autre résultat du **1)** en déduire $\beta$.

### Partie B : étude de quelques propriétés de la fonction $f$

On admet dans cette partie que l'expression de $f$ est

$$f(x) = 2 + 3xe^{-x}.$$

**1.** En utilisant l'expression de la dérivée obtenue dans la partie **A. 2. b.**, étudier les variations de la fonction $f$, et préciser les coordonnées exactes du point correspondant au maximum de cette fonction.

**2.** Étudier les limites de la fonction $f$ en - $\infty$ et en + $\infty$.

**3.** Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

**4.** Pour quelles valeurs du nombre réel $x$ a-t-on $f(x) < 2$ ?