Chapitre I
Les nombres –Ze Numbers

Exercices sur le cours

I.1 Les principaux ensembles de nombres

1.1 Vrai ou faux ?

1. Tout entier naturel est un réel.
2. Le nombre 5 est un rationnel.
3. Un nombre rationnel est toujours décimal.
4. La valeur absolue de -89 est 89.
5. Le nombre $\sqrt{7}$ est un entier.
6. Le nombre $\sqrt{16}$ est un entier.
7. Le nombre $\sqrt{16}$ est un réel.
8. L'ensemble des rationnels est inclus dans celui des entiers relatifs.

1.2 En utilisant les notations $\in$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ vues en cours, préciser le plus petit ensemble auxquels appartient chacun des nombres suivants.

1. -5 ; $\frac{4}{7}$; $12,7$.
2. $\sqrt{13}$; $-\frac{4}{7}$; $7,54847 \times 5$.
3. $\frac{18}{3}$; $\frac{17}{3}$; $\sqrt{9\pi}$.
4. $2\pi + 3$; $\frac{1}{\sqrt{81}}$; 159842.
5. $(3-\sqrt{2})^2$; $(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})$.

1.3 On donne la liste de nombres suivante :
$5,567$; 10^{-4} ; -10^4 ; 4981 ; 7×10^{-3} ; π ; $-\frac{7}{100}$; $-\frac{23}{8}$; $\frac{1}{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{169}$; $-\frac{21}{6}$; $\frac{2}{\pi}$; $\sqrt{\pi}$; $\frac{100}{7}$.

1. Lesquels sont des entiers relatifs ?
2. Lesquels sont des décimaux ?
3. Lesquels sont des rationnels ?
4. Lesquels sont des rationnels non décimaux ?
5. Lesquels sont des réels non rationnels ?

1.4 Représenter sur un segment gradué, en prenant pour unité 1 cm et en plaçant 0 au milieu, les nombres réels suivants.

1. -7 ; $3,9$; $-1,5$; $\frac{5}{3}$; $\frac{-21}{5}$.
2. $\sqrt{27}$; $\sqrt{2}-1$; $1-\sqrt{3}$; $\frac{5}{\pi}$; $\frac{-648}{100}$

I.2 Les valeurs approchées

1.5 Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-3} des nombres suivants :

1. $\dfrac{185}{186}$;
2. $\pi^7 - 3$;
3. $-12 - \dfrac{112}{37}$;
4. $\left(\dfrac{528}{53}\right)^5$;
5. $\dfrac{235329}{7354}$;
6. $-\dfrac{235329}{7354}$.

1.6 Donner une valeur approchée par excès à 10^{-2} des nombres suivants :

1. $\dfrac{185}{186}$;
2. $\pi^7 - 3$;
3. $-12 - \dfrac{112}{37}$;
4. $\left(\dfrac{528}{53}\right)^5$;
5. $\dfrac{235329}{7354}$;
6. $-\dfrac{235329}{7354}$.

A little bit of maths

Scientific notation

Definition 1
A decimal number x is said to be in *scientific notation* if there exist two numbers k and n such as

$$x = k \cdot 10^n,$$

where k is a decimal number whose absolute value is in the interval $[1;10[$, and n is an integer (positive or negative).

Examples :
- 158 ; $-45,8$ and $3,7$ are not in scientific notation ;
- $-2,58749.10^5$ is in scientific notation, as $1 \leqslant 2,58749 < 10$ and 5 is an integer ;
- 12.10^{-8} is not in scientific notation because 12 is superior to 10 ;
- $0,587.10^2$ is not in scientific notation because $0,587$ is less than 1.

1.7 Write the following numbers in scientific notation.

1. 45 ;
2. -4879 ;
3. $0,258$;
4. $-0,0037$;
5. $2354879,254$;
6. -8 ;
7. 100000 ;
8. $0,00001$.

Historical problems about numbers

1.8 **Approximate values of the number π**
The famous number π appears in the computation of the width and surface of a circle. This number is not rational, there exist no integers p and q such as $\pi = \frac{p}{q}$.
The circle being important in many practical problems (in architectura for example), it's useful to know an approximate value of π accurate enough to be used in computation. Across the ages many values have been tried, using fractional numbers and radicals.

In each case, compute the decimal approximate value p with 8 digits after the decimal point and the absolute difference between this approximate value and the value P given by your calculator (that is, the absolute value $|p - \mathrm{P}|$).

1. 20th century B.C. : $3 + \frac{7}{60} + \frac{1}{120}$.
2. In Babylon, around 2000 B.C. : $3 + \frac{1}{8}$.
3. In Egypt, around 1800 B.C. : $(\frac{16}{9})^2$.
4. 4th century B.C. : $2\sqrt{\sqrt{20} - 2}$.
5. In China and India, at the beginning of our era : $\sqrt{10}$, ou bien $\frac{142}{45}$, ou encore $3 + \frac{177}{1250}$.
6. In Persia, around the 15th century : $\frac{1}{2}(6 + \frac{16}{60} + \frac{59}{60^2} + \frac{28}{60^3} + \frac{1}{60^4} + \frac{34}{60^5} + \frac{51}{60^6} + \frac{46}{60^7} + \frac{14}{60^8} + \frac{50}{60^9})$.
7. In France ; around the 16th century : $\frac{3}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{6})$.
8. 17th and 18th centuries : $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

What is the best approximate value ?

Some Arithmetic's tricks

Definition 2
An integer a divides another one n if there exists a third integer b such as $ab = n$. The number n is then divisible by a (and by b), it's a multiple of these two numbers.

1.9 Which of these integers are multiples of 7 ? 21 ; 25 ; 34 ; 41 ; 42 ; 73 ; 425.

There are a few divisibility rules that can help you to find out if a number x is divisible by another (simple) one without carrying out any actual division.

- x is divisible by 2 if it ends in 0, 2, 4, 6 or 8.
- x is divisible by 3 if the sum of its digits is also divisible by 3.
- x is divisible by 4 if the number formed by its last two digits is divisible by 4.
- x is divisible by 5 if its last digit is 0 or 5.
- x is divisible by 6 if it is divisible by 2 and 3.
- x is divisible by 8 if the number formed by its last three digits is divisible by 8.
- x is divisible by 9 if the sum of its digits is also divisible by 9.
- x is divisible by 10 if it ends in 0.
- x is divisible by 11 if the sum of its digits with alternating signs from the last to the first (+, −, +, −,...) is divisible by 11.

1.10 Use these rules to answer the next questions. Always explain your method.

1. Is 11137578 divisible by 2 ?
2. Is 487259 divisible by 3 ?
3. Is 6498717 divisible by 4 ?
4. Is 83749470 divisible by 5 ?
5. Is 7258296 divisible by 6 ?
6. Is 5749864 divisible by 8 ?
7. Is 738207585 divisible by 9 ?
8. Is 7303020 divisible by 10 ?
9. Are 673178 and 7102932 divisible by 11 ?

Exercices d'aide individualisée

Puissances et racines carrées

1.11 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Démontrer les affirmations vraies et corriger les fausses.

1. $\sqrt{25} = 5$;
2. $\sqrt{4} = 16$;
3. $\sqrt{9 \times 8} = \sqrt{9}\sqrt{8}$;
4. $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$;
5. $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$;
6. $\sqrt{154}^2 = 154$;
7. $\sqrt{-154}^2 = -154$;
8. $\sqrt{154^2} = 154$;
9. $\sqrt{-154^2} = -154$;
10. $\sqrt{9+4} = \sqrt{9} + \sqrt{4}$;

1.12 Simplifier au maximum les expressions suivantes puis effectuer les calculs en précisant les formules utilisées.

1. $3^5 \times 3^2$;
2. $5^2 \times 5^{-3}$;
3. $10^{-3} \times 10^{-2}$;
4. $\dfrac{3^5}{3^2}$;
5. $\dfrac{7^2}{7^{-3}}$;
6. $3^5 \times 2^5$;
7. $6^{-2} \times 5^{-2}$;
8. $\dfrac{3^{-4}}{2^{-4}}$;
9. $\dfrac{8^3}{4^3}$;
10. $(2^3)^4$;
11. $(10^{-2})^{-3}$;
12. $(4^2)^{-1}$.

1.13 Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $\dfrac{2^5 \times 3^7 \times 5^3}{2^3 \times 3^{-1} \times 5^1 \times 7}$;
2. $\dfrac{10^2 \times 7 \times 3^{-4}}{2^{-2} \times 3^{-1} \times 7^2 \times 5^2}$;
3. $\dfrac{6^{-2} \times 3^{2^{-2}}}{2^4 \times 3^{-5}}$;
4. $\dfrac{25^3 \times 16^{-2} \times 81^3 \times 2^2}{2^{-6} \times 3^9 \times 5^6}$.
5. $(7^3)^2 - 49^3$;
6. $10^5 \times 10^{-3} \times 5^3 \times 2^3$;
7. $0,4^3 \times \dfrac{5^3}{2^3}$.
8. $6.10^7 \times 5.10^{-3} \times 2.10^{-5}$;

1.14 La distance entre la Terre et le Soleil est d'environ 149 millions de kilomètres. Sachant que la lumière se déplace à la vitesse approximative de $3 \times 10^8\, m.s^{-1}$, calculer le temps que met la lumière du soleil pour nous parvenir.