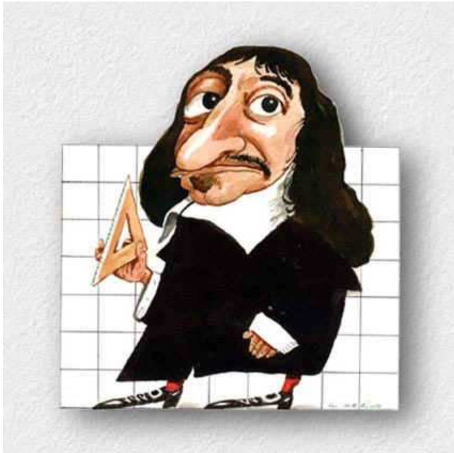
CHAPITRE 2

Fonctions : la découverte...



I Qu'est-ce qu'une fonction ?

Mathémator : ce nom vous est familier...

Secondix : oui ! Au Collège, nous avons étudié les fonctions linéaires et les fonctions affines. Ça parle de droites, c'est ça ?

Mathémator : mmmmouais... Il va falloir reprendre depuis le début ! Alors ouvrez un dictionnaire pour y regarder la définition de *fonction*.

Secondix : Ouh la la ! Il y en a des tonnes.

Mathémator : Regardez le quatrième paragraphe.

Secondix : alors...

> **4. FONCTION** n.f. (de *fonction 1 ; 1692*) **1.** *Math.* Grandeur variable dont la valeur dépend de celle qui est attribuée à une autre variable, dite *variable indépendante*. - **2.** (1890) *Être fonction de*, dans la langue usuelle, se dit d'une chose dont la nature, le rôle, etc. dépendant d'une autre chose : *Le développement de l'enfant est fonction de l'établissement des connexions nerveuses.*)

Mathémator : Arrêtons-nous là ! Ces dates montrent que la notion mathématique date de la fin du XVII$^{\text{ème}}$ siècle (voir le petit aparté historique page 4) et que cette notion est entrée dans la langue usuelle deux siècles plus tard.

Secondix : une notion mathématique est passée dans le langage courant !

Mathémator : c'est en effet une notion assez naturelle : il est facilement compréhensible que la taille d'un enfant varie *en fonction de* son âge, que l'on prépare sa valise *en fonction de* la destination de son voyage, que la consommation d'une voiture varie *en fonction de* sa vitesse, etc.
D'ailleurs, nous ne donnerons pas une définition mathématiquement rigoureuse d'une fonction. Pour cela, il aurait fallu être habitué à la notion de *relation* entre des ensembles : vos parents y avaient été initiés dès la maternelle... En parler maintenant risquerait de vous traumatiser durablement.

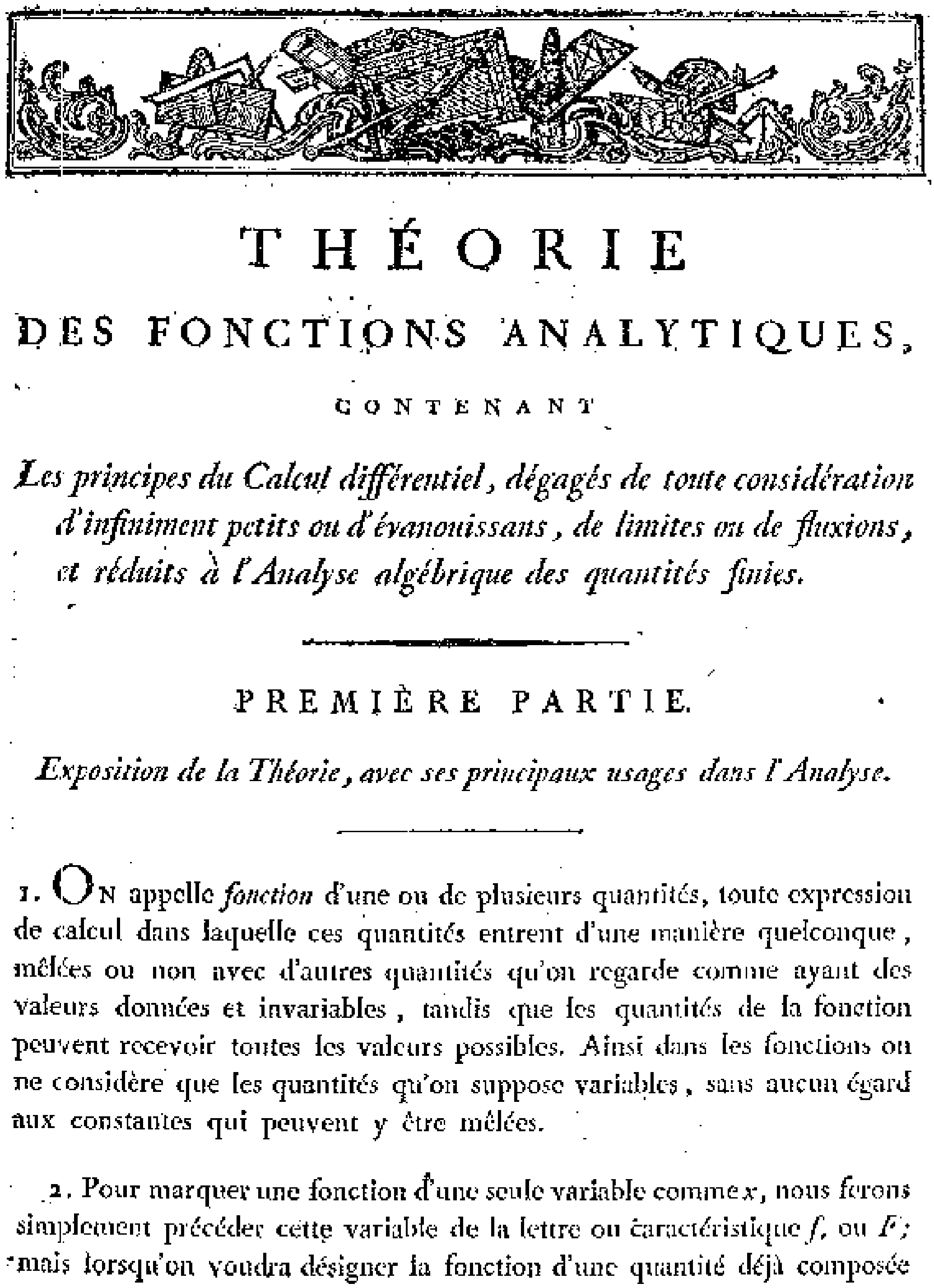
Secondix : vous croyez que je suis plus bête que mes parents, c'est ça ?...

Mathémator : loin de moi cette idée. Le contenu des enseignements ayant changé, il faut adapter nos travaux d'approche. Nous reviendrons d'ailleurs à la notion originale, celle de LEIBNIZ, celle d'action, de mécanisme, de fonctionnement, de dépendance, bref une notion dynamique.

Définition 1 : Fonction numérique d'une variable réelle

On appelle fonction numérique d'une variable réelle un « mécanisme mathématique » qui, à tout nombre appartenant à un certain ensemble appelé **domaine de définition de la fonction**, associe un nouveau nombre, appelé **image** du nombre initial.

LAGRANGE présenta cette idée d'une manière un peu plus sophistiquée comme nous pouvons le découvrir sur le texte de la figure suivante :



THÉORIE

DES FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

Les principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'Analyse algébrique des quantités finies.

PREMIÈRE PARTIE.

Exposition de la Théorie, avec ses principaux usages dans l'Analyse.

1. ON appelle *fonction* d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.

2. Pour marquer une fonction d'une seule variable comme x, nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre ou caractéristique f, ou F; mais lorsqu'on voudra désigner la fonction d'une quantité déjà composée

Nous ne pouvons vraiment définir la notion de « mécanisme » mais elle est assez parlante pour vous aider à comprendre ce qu'est une fonction.

Exemple 1 :

Considérons par exemple la fonction qui à tout nombre réel associe le carré de son double auquel on ajoute dix-huit. Calculez les images de 7, $-\frac{5}{2}$, $\sqrt{3}$.

Secondix : voyons si j'ai bien compris : je pars de 7, je prends son double, c'est-à-dire 14, je l'élève au carré ce qui donne 196 puis j'ajoute 18 et j'obtiens 214. L'image de 7 par cette fonction est donc 214.

Mathémator : parfait ! Il ne reste plus qu'à traiter les autres cas.

Secondix : pas de problème !

- ....
- ....
- ....
- ....

Mathémator : nous avons ici défini une fonction qui transforme n'importe quel nombre réel en un autre suivant un mécanisme décrit par une phrase.
Nous pouvons également décrire cette fonction en utilisant des notations mathématiques utilisées depuis qu'elles ont été introduites par LAGRANGE.
Détaillons *algébriquement* la transformation d'un nombre quelconque n :

- on prend le double de n qui devient donc $2n$;
- on élève ce double au carré : on obtient $(2n)^2$;
- on ajoute au nombre précédent 18 : on obtient finalement $(2n)^2 + 18$.

Ainsi, la fonction étudiée transforme un nombre réel quelconque n en $(2n)^2 + 18$.
Donnons un nom à cette fonction, par exemple φ.

Secondix : c'est quoi cette lettre ?

Mathémator : c'est la lettre grecque « phi »... comme fonction. Le choix de la lettre n'est pas important. On prend celle qu'on veut. On peut se mettre d'accord si vous voulez d'utiliser des lettres grecques pour les fonctions pour les distinguer des nombres désignés par des lettres romaines mais ce n'est pas obligatoire et il n'existe aucune règle générale. Sachez que quand LAGRANGE a introduit ses notations, il a utilisé f pour la fonction et x pour la variable et que cette habitude est restée mais ce n'est qu'une habitude.

Secondix : vous savez, moi et l'alphabet grec....

Mathémator : $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \zeta\ \eta\ \theta\ \iota\ \kappa\ \lambda\ \mu\ \nu\ \xi\ o\ \pi\ \rho\ \sigma\ \tau\ \upsilon\ \varphi\ \chi\ \psi\ \omega$...

Revenons à notre problème. Il est d'usage d'écrire :

$$\varphi\ :\ n \longmapsto (2n)^2 + 18$$

la petite flèche traduisant l'idée dynamique de transformation d'un nombre en un autre. Notez que cette flèche commence avec un petit trait vertical. C'est une habitude pour la distinguer des autres types de relations désignés par des flèches.
On peut aussi préciser les ensembles avec lesquels on travaille :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0\,;+\infty[\\ n & \longmapsto & \varphi(n) \end{array}$$

qui se lit : « la fonction φ qui va de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et qui à un nombre n associe le nombre $(2n)^2 + 18$.

Voici une variante :

$$n \overset{\varphi}{\longmapsto} (2n)^2 + 18$$

On a plutôt l'habitude d'écrire :

$$\varphi(n) = (2n)^2 + 18$$

Le « $\varphi(n)$ » se lisant « phi de n » et désignant l'image du nombre n par la fonction φ. Il ne faudra surtout pas confondre cette écriture avec une quelconque multiplication de φ par n. J'avoue que l'écriture est ambiguë mais le contexte nous permettra de distinguer les cas.
Par exemple, ici, on peut noter :

$$\varphi\ :\ 7 \longmapsto 214$$

ou

$$7 \stackrel{\varphi}{\longmapsto} 214$$

ou encore

$$\varphi(7) = 214$$

Faites de même avec les deux autre exemples.

Un peu d'histoire...

D'abord une date : 1692. C'est en effet cette année-là que Wilhelm LEIBNIZ(1646-1716) introduisit officiellement le terme de *fonction* du latin *functio* : accomplissement, exécution qu a donné en français *fonctionnement*. La notation que nous utilisons actuellement, à savoir $f(x)$ qui désigne l'image de x par la fonction f a été introduite un siècle plus tard par Joseph-Louis de LAGRANGE (1736-1813) dans sa « Théorie des fonctions analytiques » parue en 1797 dont vous pouvez voir un extrait figure **??** page ??.
Pendant longtemps, $f(x)$ désigna aussi bien une fonction que l'image d'un nombre x par cette fonction. À partir de 1940, suite au travail du groupe de mathématiciens français BOURBAKI, c'est f qui désigne la fonction et $f(x)$ ne désigne que l'image de x par la fonction f.
Au lieu de $f(x)$, on notait souvent avant LAGRANGE f_x l'image de x par la fonction f. Cette notation est restée aujourd'hui pour désigner un cas particulier de fonctions, les suites, que vous étudierez en classe de 1$^{\text{ère}}$.

FIGURE 1 – W. LEIBNIZ

Mathémator : avec nos notations, nous pouvons réécrire notre définition et préciser quelques notations :

Définition 2 : fonction : notation et vocabulaire

Soit $\mathscr{D}_\varphi$ un ensemble. Une fonction φ est un « mécanisme mathématique » qui à tout nombre n appartenant à $\mathscr{D}_\varphi$ associe le nombre $\varphi(n)$ appelé **image** de n par φ.
On note :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_\varphi & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \varphi(n) \end{array}$$

On appelle $\mathscr{D}_\varphi$ l'**ensemble de définition** de φ.
Le nombre n est **UN antécédent** de $\varphi(n)$ par φ.

II Différentes représentations d'une fonction

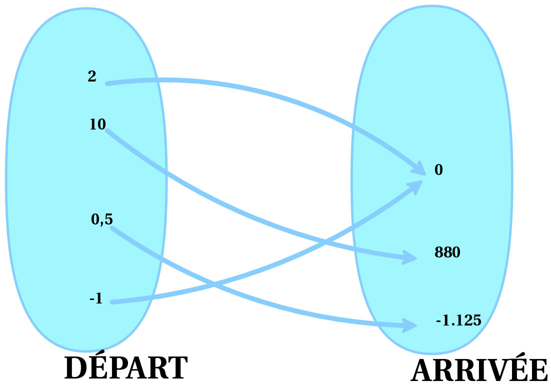
Étudions cette fois la fonction ψ qui à un nombre n associe $n\cdot(n+1)\cdot(n-2)$:

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0\,;+\infty[\\ n & \mapsto & n\cdot(n+1)\cdot(n-2) \end{array}$$

Par exemple, $\psi(2) = \ldots$, $\psi(0,5) = \ldots$, $\psi(-2) = \ldots$

a. Diagramme sagittal

On peut représenter la situation à l'aide d'un *diagramme sagittal* :



Alors :
2 a pour image ....
-1 a pour image ....
$0,5$ a pour image ....
-2 a pour image ....
880 a pour antécédent ....
$-1,125$ a pour antécédent ....
0 a pour antécédent ....

b. Tableau de valeurs

On aurait pu opter pour un *tableau de valeurs* :

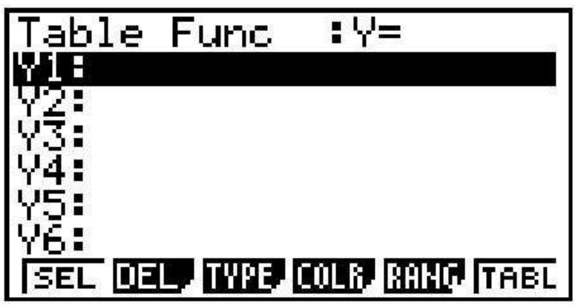
n	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\psi(n)$							

c. Utilisation de la machine

Ici les calculs peuvent être effectués de tête mais dans certains cas l'usage de la machine rendra bien des services. Comment obtenir le tableau ci-dessus avec une CASIO ou une TI ?

Avec les CASIO

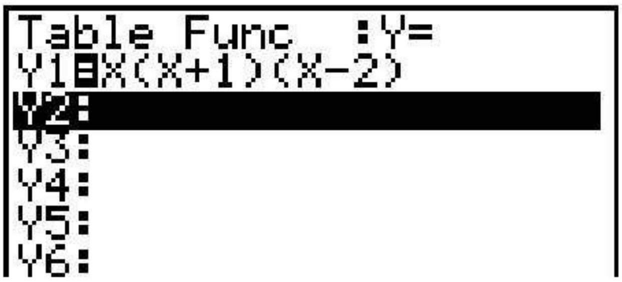
On appuie sur MENU puis on sélectionne 



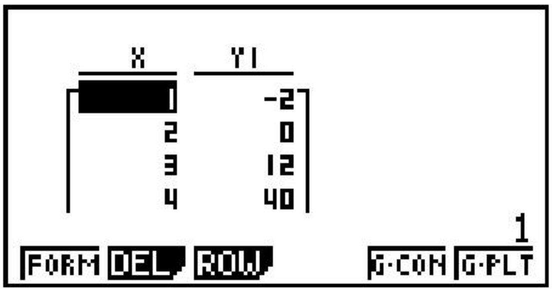
On peut effectuer des réglages en sélectionnant [RANG] :

`Start` et `End` ne sont pas des mots trop compliqués à comprendre... Quant à `Pitch`, il correspond au pas régulier entre chaque valeur des nombres dont on veut connaître l'image.
On entre alors la formule correspondant à la fonction étudiée. Ici :

[X,θ,T] [(] [X,θ,T] [+] [1] [)] [(] [X,θ,T] [−] [2] [)] [EXE]

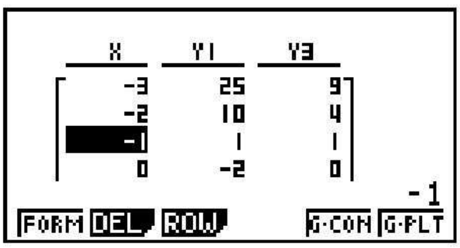


On obtient le tableau sur deux colonnes :

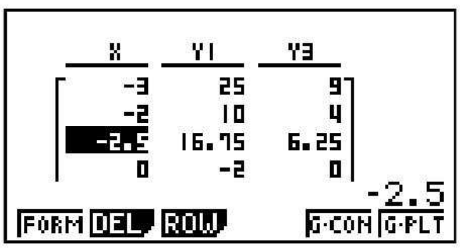


Pour calculer l'image d'une valeur n'intervenant pas dans le tableau, on met en surbrillance une valeur et on la remplace par la nouvelle valeur. Par exemple, pour obtenir l'image de $-2,5$ à la place de celle de -1 on peut faire :

▼ ▼

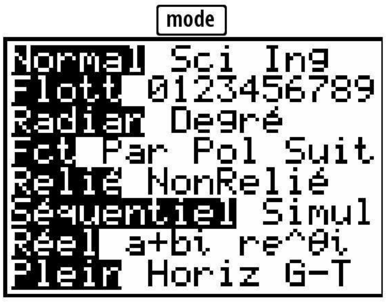


[(−)] [2] [·] [5] [EXE]



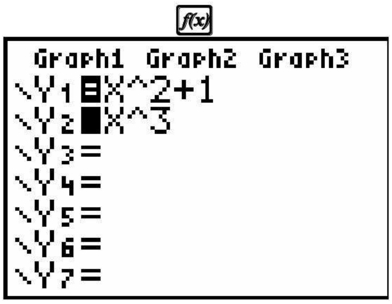
Avec les TI

Vérifier que vous êtes dans le bon mode en tapant sur [mode] :



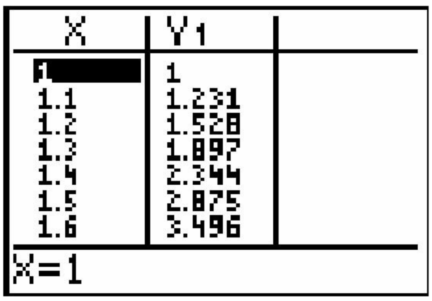
Taper ensuite sur [$f(x)$] et entrer la fonction comme pour les CASIO :

[x,t,θ,n] [(] [x,t,θ,n] [+] [1] [)] [(] [x,t,θ,n] [−] [2] [)] [entrer]

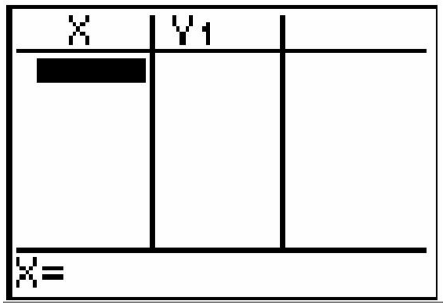


Il s'agit ensuite d'effectuer quelques réglages en allant sur [2nde] [déf table] :

Les deux premières lignes sont faciles à utiliser. Pour les deux dernières, on les réglera selon nos besoins.
Si on laisse en mode `Auto`, on a notre tableau avec un pas régulier :



Le mode `Dem` est le mode manuel. En le mettant en surbrillance pour `Valeurs`, on obtient cet écran :



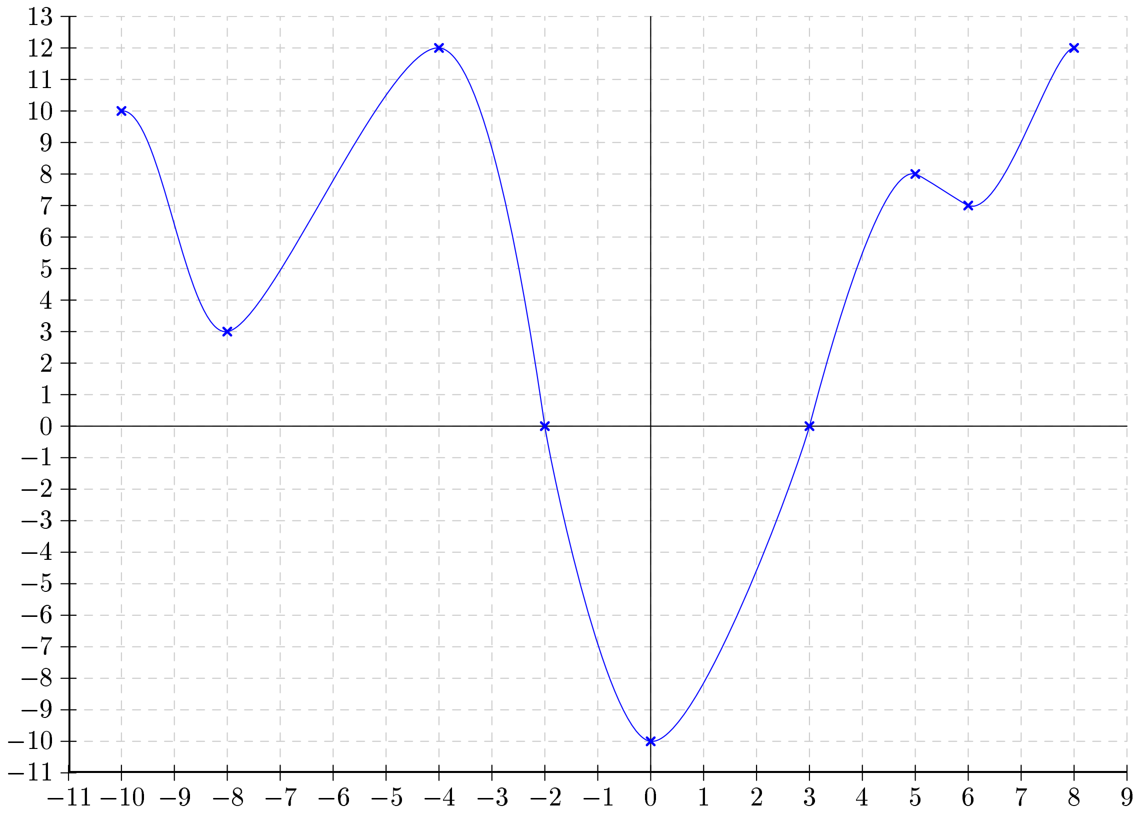
Il suffit alors de taper dans la première colonne les valeurs des nombres dont on veut connaître l'image.

d. Représentation graphique

Lecture d'une courbe

Exemple 2 :

Ivan IVANOV, un dissident Bordure, décide de passer clandestinement la frontière borduro-syldave en empruntant un tunnel construit par la résistance. Malheureusement, le réseau a été infiltré par la police Bordure qui a placé une balise GPS sur Ivan ce qui permet de suivre son cheminement. Voici le tracé obtenu par les Bordures qui donne à chaque instant l'altitude en mètres d' Ivan en fonction du temps t exprimé en minutes sachant que $t = 0$ correspond au passage de la frontière :



En utilisant ce graphique, répondez aux questions suivantes avec la précision permise par le tracé.

1. Combien de temps Ivan a-t-il passé sous terre ?

....

2. Combien de temps a-t-il mis pour atteindre la frontière ?

....

3. Combien de fois s'est-il trouvé à 11 mètres d'altitude ?

....

4. À quel instant se trouvait-il à 12 mètres d'altitudes ?

....

5. À quelle hauteur se trouvait-il 6 minutes après avoir passé la frontière ?

....

6. Résumez le parcours d'Ivan dans un tableau où vous figurerez par une flèche vers le haut les périodes où Ivan a grimpé et par une flèche vers le bas les périodes où Ivan a descendu.

7. Résumez le parcours d'Ivan dans un tableau où vous figurerez par un + les périodes où Ivan a été au-dessus du niveau de la mer et par un − les périodes où Ivan a été en-dessous du niveau de la mer.

Voilà à quoi se résume ce qui vous est demandé de savoir faire en classe de 2nde sur la lecture graphique...

Représentation graphique d'une fonction : un exemple

Exemple 3 :

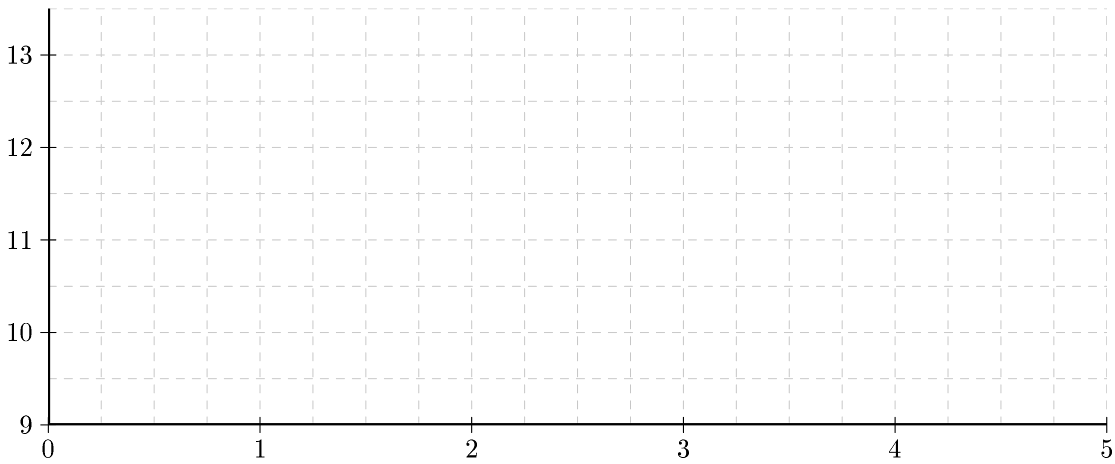
Des savants syldaves ont mis au point une formule donnant la hauteur h du gazon du jardin du Guide Suprême en centimètres en fonction du temps t en année écoulé depuis la Grande Révolution :

$$h(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10$$

1. Complétez le tableau suivant :

t	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25	3,5	3,75	4	4,25
$h(t)$																		

2. Placez dans le repère suivant les points de coordonnées $(t, h(t))$, en remplaçant t par les valeurs du tableau. Vous marquerez les points par une croix :

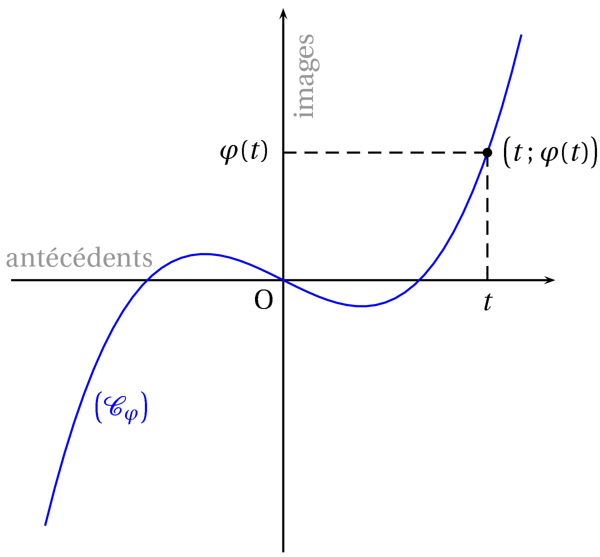


3. Que se passe-t-il à votre avis « entre les croix » ?

Représentation graphique d'une fonction : le cours

Définition 3 : représentation graphique d'une fonction

Soit φ une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_\varphi$ et un repère (O,I,J).
On appelle **représentation graphique de la fonction** φ l'ensemble des points de coordonnées $\left(t\,;\varphi(t)\right)$, avec $t \in \mathscr{D}_\varphi$.
On note souvent cet ensemble $\left(\mathscr{C}_\varphi\right)$



Attention !

Une courbe peut être... une droite. En effet, vous avez vu l'année dernière que la courbe représentative d'une fonction affine était une droite. Nous en reparlerons plus tard.

III Résolution d'équations et d'inéquations

a. Résolution graphique d'équations

Nous ne savons résoudre que très peu d'équations algébriquement (par le calcul). Par exemple, nous ne savons pas résoudre sur $[0;4]$ l'équation :

$$\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+10=11$$

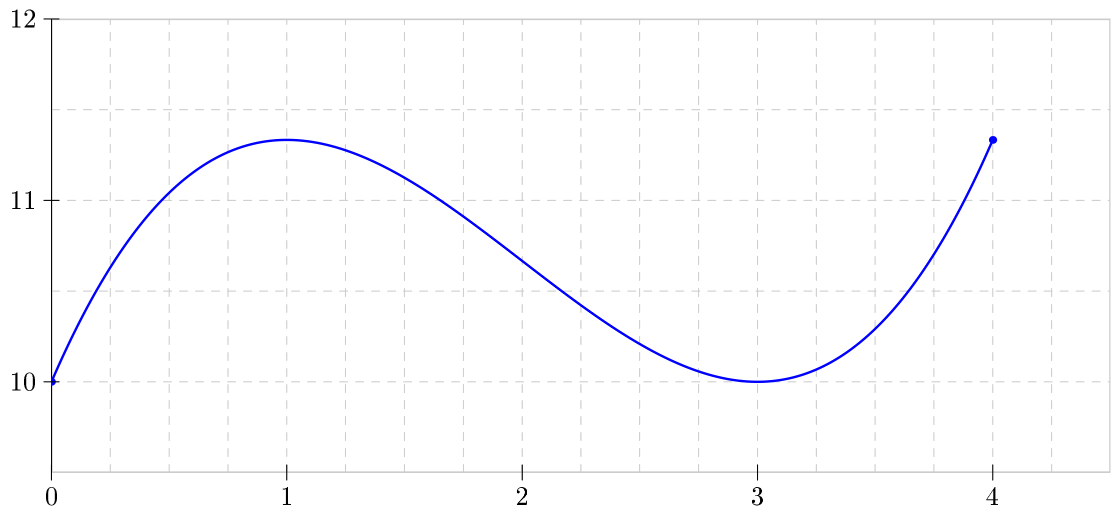
Mais nous savons tracer à peu près la représentation graphique de la fonction

$$\varphi : \begin{array}{rcl} [0;4] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t^3}{3}-2t^2+3t+10 \end{array}$$

Nous savons aussi tracer la représentation graphique de la fonction :

$$\psi : \begin{array}{rcl} [0;4] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & 11 \end{array}$$

Regroupons les deux représentations sur un même graphique (il en manque une...) :



Un point situé à l'intersection de ces deux courbes... appartient à ces deux courbes donc ses coordonnées sont de la forme :

- d'une part $(t, \frac{t^3}{3}-2t^2+3t+10)$ car il appartient à $(\mathscr{C}_\varphi)$;
- d'autre part $(t, 11)$ car il appartient à $(\mathscr{C}_\psi)$.

Alors $\frac{t^3}{3}-2t^2+3t+10=11$ donc l'abscisse t de ce point est une solution de l'équation $\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+10=11$
On peut donc lire les solutions de l'équation sur le graphiques : ce sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.
Ici, on trouve trois solutions : $x_1 \approx$ ....., $x_2 \approx$ ..... et $x_3 \approx$ ......

b. Résolution graphique d'inéquations

C'est un peu le même problème que pour les équations. Reprenons l'exemple précédent. Nous ne savons toujours pas résoudre sur $[0;4]$ l'inéquation :

$$\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+10 \leqslant 11$$

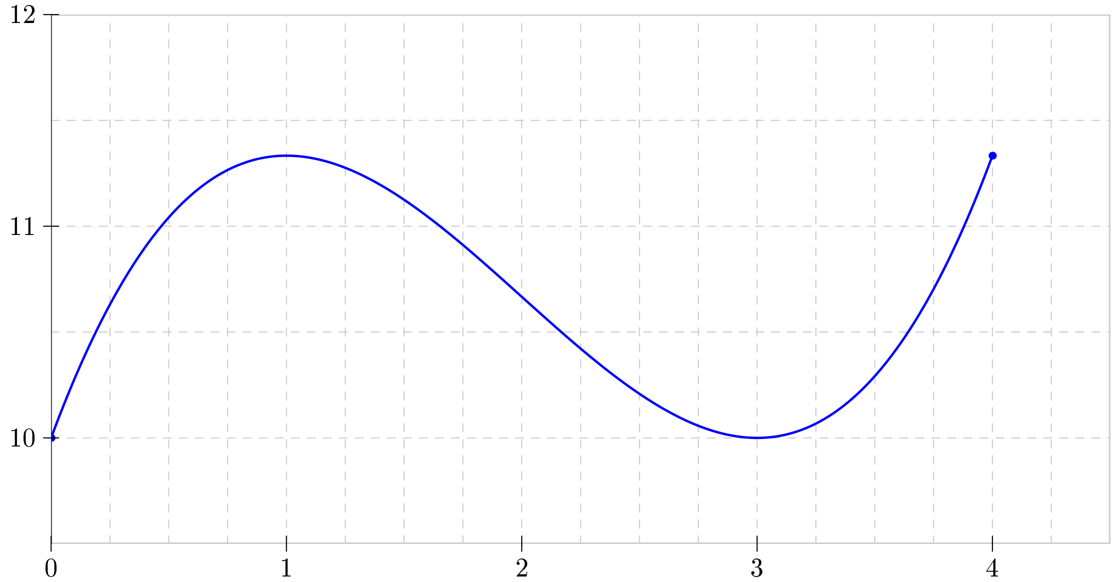
Mais nous savons tracer à peu près la représentation graphique de la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0\,;4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10 \end{array}$$

Nous savons aussi tracer la représentation graphique de la fonction :

$$\psi : \begin{array}{ccc} [0\,;4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 11 \end{array}$$

Regroupons les deux représentations sur un même graphique (il en manque toujours une...) et plaçons les trois solutions trouvées précédemment :



Un point de $\mathscr{C}_\varphi$ dont l'abscisse t est située dans l'intervalle $[0\,; x_1]$ est au-dessous du point de $\mathscr{C}_\psi$ ayant la même abscisse.
L'ordonnée $\varphi(t)$ du premier est donc inférieure à l'ordonnée $\psi(t)$ du second.
Ainsi, quelque soit $t \in [0\,; x_1]$, on a $\varphi(t) \leqslant \psi(t)$, c'est-à-dire $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 10 \leqslant 11$. L'intervalle $[0\,; x_1]$ est donc inclus dans l'ensemble des solutions de l'inéquation.
Trouvez l'autre intervalle qui est inclus dans l'ensemble des solutions de l'inéquation.

Résolvez alors l'inéquation sur $[0\,;4]$:

Attention !
Ces méthodes de résolutions d'équations et d'inéquations présentent deux gros inconvénients :
- on n'obtient que des APPROXIMATIONS des solutions. Pour vérifier s'il s'agit réellement d'une solution exacte, il faut effectuer un calcul ;
- on ne peut lire que les approximations des solutions qui apparaissent dans la « fenêtre » affichée. On ne peut donc pas savoir s'il en existe d'autres ailleurs.

Cependant, ces méthodes présentent l'avantage de pouvoir localiser à peu près des solutions d'équations et d'inéquations que nous ne savons pas (encore) résoudre algébriquement.

Définition 4 : fonctions croissantes et décroissantes sur un intervalle
Soit φ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite
- *croissante* si, et seulement si, quels que soient les réels t_1 et t_2 dans I vérifiant $t_1 \leqslant t_2$, leurs images par φ vérifient aussi $\varphi(t_1) \leqslant \varphi(t_2)$;
- *décroissante* si, et seulement si, quels que soient les réels t_1 et t_2 dans I vérifiant $t_1 \leqslant t_2$, leurs images par φ vérifient aussi $\varphi(t_1) \geqslant \varphi(t_2)$.

IV Variations d'une fonction

a. Définitions

Autrement dit, une fonction croissante est une fonction qui conserve l'ordre et une fonction décroissante est une fonction qui l'inverse.
On parle de fonction *strictement croissante* si $t_1 < t_2$ implique $\varphi(t_1) < \varphi(t_2)$ et *strictement décroissante* si $t_1 < t_2$ implique $\varphi(t_1) > \varphi(t_2)$.

Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction croissante « monte » de la gauche vers la droite et celle d'une fonction décroissante « descend ».

Exemple 4 :

Déterminer *graphiquement* le sens de variation de la fonction $\varphi : \begin{array}{rcl} [0\,;4] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10 \end{array}$ étudiée précédemment.

Définition 5 : fonction constante
Une fonction φ est *constante* sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, quels que soient réels t_1 et t_2 dans $\mathbb{R}$, $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$.

Définition 6 : fonction monotone
Une fonction est monotone sur un intervalle I si, et seulement si, elle est soit toujours croissante, soit toujours décroissante sur cet intervalle.

Définition 7 : extremum local

Soit φ un fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Un réel M est un *maximum local* d'une fonction φ sur un intervalle J inclus dans I si pour tout élément t de J on a

$$\varphi(t) \leqslant \mathrm{M}$$

C'est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe représentative de f sur l'intervalle J.

Un réel m est un *minimum local* d'une fonction φ sur un intervalle J inclus dans I si pour tout élément t de J on a

$$\varphi(t) \geqslant m$$

C'est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe représentative de φ sur l'intervalle J.

Exemple 5 :

Déterminez *graphiquement* les extrema locaux de la fonction $\varphi : \begin{array}{rcl} [0\,;4] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10 \end{array}$ étudiée précédemment.

b. Tableau de variation

On représente parfois les variations d'une fonction par un tableau. La première ligne contient les valeurs importantes de la variable t, c'est à dire les bornes de l'intervalle de définition et les valeurs pour lesquelles le sens de variation change. La seconde ligne expose les variations de la fonction par des flèches et les images, si elles existent, des nombres présents dans la première ligne. En première, on y fera aussi apparaître les *limites* de la fonctions.

Par exemple, en reprenant une nouvelle fois la fonction $\varphi : \begin{array}{rcl} [0\,;4] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 10 \end{array}$

t	0		1		3		4
Variations de φ	10	↗	$\frac{34}{3}$	↘	10	↗	$\frac{34}{3}$

.