

CHAPITRE 2

LES COMPLEXES



Résumé Les nombres complexes portent bien leur nom ! Ils interviennent partout : en algèbre, en analyse, en géométrie, en électronique, en traitement du signal, en musique, etc. Et en plus, ils n'ont jamais la même apparence : tantôt sous forme algébrique, tantôt sous forme trigonométrique, tantôt sous forme exponentielle, ... Leur succès vient en fait de deux propriétés : en travaillant sur les nombres complexes, tout polynôme admet un nombre de racines égal à son degré et surtout ils permettent de calculer facilement en dimension 2.

2.1 - VOCABULAIRE ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Théorème 1 L'ensemble \mathbb{C}

On définit un ensemble \mathbb{C}

- ▷ muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de \mathbb{R}
- ▷ contenant un nombre i vérifiant $i^2 = -1$
- ▷ tel que chaque élément z de \mathbb{C} peut s'écrire de manière **unique** sous la forme

$$z = a + ib \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels}$$

a. Forme algébrique

Cette écriture unique est appelée **forme algébrique** du réel z .

Le nombre a est appelé **partie réelle** de z et notée $\Re(z)$

Le nombre b est appelé **partie imaginaire** de z et notée $\Im(z)$

⚠ $\Im(z)$ est un nombre réel.

b. À quoi sert l'unicité de la forme algébrique ?

Par exemple, après maints calculs savants, vous arrivez au résultat $2x + 3y - 5 + i(7x - 32y + 1) = 0$ avec x et y des réels. Et bien le membre de gauche est une forme algébrique puisque de la forme réel + i ·réel. Or la forme algébrique de 0 est $0 + i \cdot 0$.

Ainsi, une équation complexe revient à deux équations réelles (bienvenue dans la deuxième dimension...) et donc

$$2x + 3y - 5 + i(7x - 32y + 1) = 0 \iff \begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ 7x - 32y + 1 = 0 \end{cases}$$

c. Le plan complexe

Nous avons vu que chaque nombre complexe peut être associé à un point du plan qu'on munit d'un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

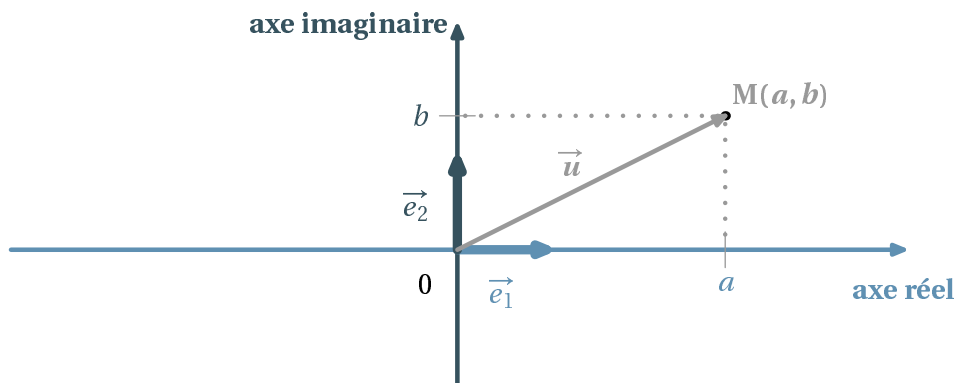


FIG. 1 -

À tout nombre complexe $z = a + ib$ on associe le point M de coordonnées (a, b) qu'on appelle **image** de complexe $z = a + ib$. On le note souvent $M(z)$.

Inversement, à tout point M du plan de coordonnées (a, b) , on associe son **affixe** $z = a + ib$ qu'on note souvent z_M .

Enfin, à tout vecteur $\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ de coordonnées (a, b) dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est associée une affixe $z_{\vec{u}} = a + ib$

d. Premiers calculs géométriques

▷ Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de coordonnées respectives (a, b) et (a', b') , alors $\vec{u} + \vec{v} = (a + a')\vec{e}_1 + (b + b')\vec{e}_2$, donc

$$z_{\vec{u} + \vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$$

▷ De même, si λ est un nombre réel

$$z_{\lambda \vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}$$

▷ Alors, si I est le **milieu** du segment $[A, B]$, on a

$$z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$$

▷ Plus généralement, si G est le barycentre du système $\{(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2), \dots, (A_n, \alpha_n)\}$ alors

$$z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \dots + \alpha_n z_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

▷ Pour tous points A et B

$$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A$$

e. Conjugué d'un complexe

Définition 1 Conjugué

On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre

$$\bar{z} = a - ib$$

Géométriquement cela donne

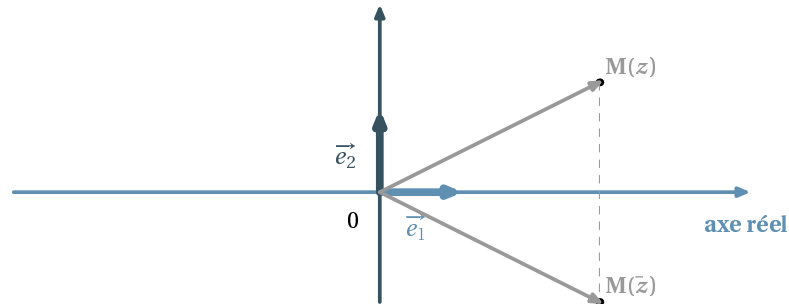


FIG. 2 -

Je vous laisse prouver les propriétés immédiates suivantes

Propriété 1 Propriétés des conjugués

- ▷ $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe (O, \vec{e}_1)
- ▷ $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- ▷ $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- ▷ $\overline{\bar{z}} = z$
- ▷ $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- ▷ $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$
- ▷ $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
- ▷ $\Im(z) = \frac{1}{2}(z - \bar{z})$
- ▷ Si $z = a + ib$, alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$

f. À quoi servent les conjugués ?

À montrer qu'un complexe est un réel

En effet, si on arrive à montrer que $\bar{z} = z$, alors on en conclut que z est réel.

À rendre réel des dénominateurs pour obtenir des formes algébriques

En effet,

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$$

Ainsi, pour obtenir la forme algébrique de l'inverse de $2 + i$,

$$\frac{1}{2+i} = \frac{1}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{2+i}{4+1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$$

g. Module d'un nombre complexe

Définition 2 Module

Le module du complexe z est le réel positif noté $|z|$ tel que

$$|z| = \sqrt{z \bar{z}}$$

Quelques remarques

- ▷ Cette définition en est bien une car $z \bar{z} = a^2 + b^2$ d'après notre étude sur les conjugués.
- ▷ Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a \bar{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\bar{a} = a$. Donc le module de a est bien la valeur absolue de a et notre notation est cohérente.

La notion de module dans \mathbb{C} généralise donc celle de valeur absolue dans \mathbb{R} .

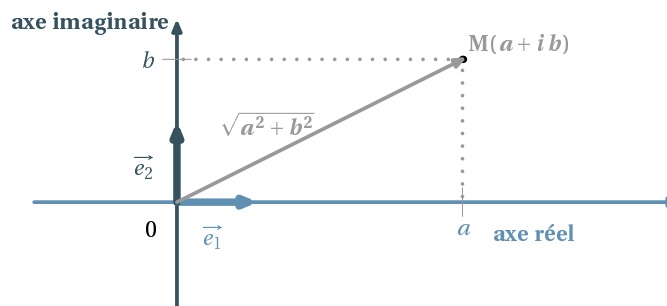
Interprétation géométrique

FIG. 3 –

Nous venons de voir que, si $z = a + ib$, alors

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Or, qu'est-ce que $\sqrt{a^2 + b^2}$ si ce n'est la norme du vecteur \vec{OM} ou encore la longueur OM .

$$|z_M| = \|\vec{OM}\| = OM \quad |z_{\vec{u}}| = \|\vec{u}\|$$

Propriétés des modules

Je vous laisse prouver les propriétés suivantes

Propriété 2 Modules

- ▷ $|\bar{z}| = |z|$
- ▷ $|z| = 0 \iff z = 0$
- ▷ $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- ▷ $\Re(z) \leq |z|$
- ▷ $\Im(z) \leq |z|$

La propriété suivante mérite une petite aide à la démonstration

Propriété 3 Inégalité triangulaire

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

C'est à dire, pour aller de Nantes à Montaigu, il est plus long de passer par Bratislava que de suivre la RN 137. Comme il s'agit d'une démonstration classique, nous allons la détailler. Elle pourra servir à d'autres occasions.

Comme les deux membres de l'inégalité sont positifs, il suffit donc de comparer les carrés de chaque membre.

$$\text{Or } |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) + |z_2|^2$$

$$\text{D'autre part } (|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1z_2| + |z_2|^2$$

Il s'agit donc de comparer les « doubles produits ».

Or $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2\Re(z_1\overline{z_2}) \leq 2|z_1z_2|$ d'après une propriété ci-dessus. Donc

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$$

2.2 - RÉOLUTION D'ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

a. Racine carrée d'un nombre complexe

L'objet de cette section est de résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 = \alpha$

Racine carrée d'un nombre réel

On suppose ici que α est un réel.

- ▷ $\alpha \geq 0$: alors $z^2 = \alpha \iff (z - \sqrt{\alpha})(z + \sqrt{\alpha}) = 0$. Les solutions^a sont donc $\pm\sqrt{\alpha}$
On connaît : $z^2 = 4 \iff z = -2$ ou $z = 2$
- ▷ $\alpha < 0$: alors $z^2 = \alpha \iff (z - i\sqrt{-\alpha})(z + i\sqrt{-\alpha}) = 0$. Les solutions sont donc $\pm i\sqrt{-\alpha}$
C'est la nouveauté : $z^2 = -4 \iff z = -2i$ ou $z = 2i$

Racine carrée d'un complexe non réel

Les choses se compliquent ! Nous allons traiter un exemple pour ne pas vous faire (trop) peur.

Cherchons les racines carrées de $4 + 3i$, à savoir les nombres $a + ib$ tels que $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 4 + 3i$. Par unicité de la forme algébrique on obtient

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ 2ab = 3 \end{cases}$$

Ainsi $a^2 = 9/2$ et $b^2 = 1/2$, donc $a = \pm 3\sqrt{2}/2$ et $b = \pm\sqrt{2}/2$, or $2ab = 3$, donc a et b sont de même signe.

Les solutions sont donc $\frac{\sqrt{2}}{2}(3 + i)$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}(3 + i)$

^aLA solution si $\alpha = 0$

b. Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des réels

C'est comme en 1^{ère} : $ax^2 + bx + c = 0 \iff a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2}$

Tout dépend donc du signe de $b^2 - 4ac$, puis on utilise les résultats de la section précédente.

Théorème 2 Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des réels

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet toujours des solutions sur \mathbb{C} .

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** de l'équation

- ▷ Si $\Delta = 0$, il existe une unique solution $x = -\frac{b}{2a}$
- ▷ Si $\Delta > 0$, il existe deux solutions réelles $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- ▷ Si $\Delta < 0$, il existe deux solutions complexes conjuguées $x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Vous serez amenés au hasard d'exercices à résoudre des équations à coefficients complexes, mais on n'attend de vous aucun savoir-faire particulier : vous serez guidés pas à pas.

2.3 - FORME TRIGONOMETRIQUE

a. Argument d'un complexe non nul

Forme trigonométrique

Vous vous souvenez de la correspondance entre \mathbb{C} et le Plan. Nous avons privilégié les coordonnées cartésiennes d'un point. On aurait pu utiliser tout aussi bien ses **coordonnées polaires**. Le Plan a cette fois besoin d'être orienté (il le sera implicitement à partir de maintenant).

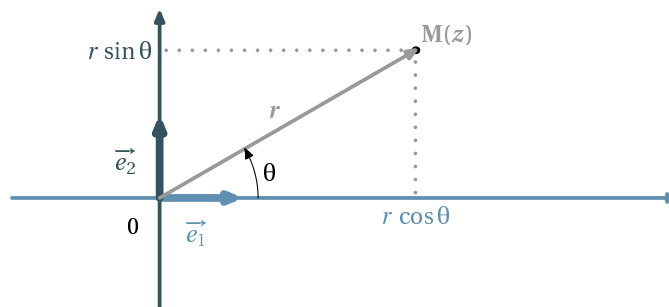


FIG. 4 -

Ainsi, (r, θ) étant le couple de coordonnées polaires de l'image M de z , on a $z = r \cos \theta + i r \sin \theta$ déterminé de manière unique, car c'est en fait une forme algébrique déguisée : on l'appelle **forme trigonométrique** du complexe z .

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Les physiciens notent ce résultat sous la forme

$$z = [r, \theta]$$

Congruence modulo 2π

Vous rencontrerez souvent^b la notation $x \equiv y[2\pi]$ qui se lit « x est congru à y modulo 2π ». Elle veut simplement dire que $x - y$ est un multiple de 2π , c'est à dire qu'il existe un entier relatif k tel que $x - y = k \times 2\pi$. Retenons

$$x \equiv y[2\pi] \iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = y + 2k\pi$$

Par exemple, vous savez que $\frac{\pi}{3} \equiv \frac{4\pi}{3}[2\pi]$.

Mesure d'un angle de vecteurs

Nous n'avons pas les moyens de définir « proprement » les angles de vecteurs. Nous n'en avons qu'une définition intuitive. Ce qui nous intéresse, c'est que θ est UNE mesure en radians de l'angle de vecteurs $(\vec{e}_1, \overline{OM})$. UNE mesure, car elle est définie modulo 2π . Et bien cette mesure sera UN argument du complexe z , qu'on notera $\arg z$. On retiendra

$$\arg z \equiv \theta[2\pi]$$

Par exemple, $\arg 32 \equiv 0[2\pi]$, $\arg 32i \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Des formes trigonométriques de référence

- ▷ $1 = \cos 0 + i \sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) \equiv 0[2\pi]$
- ▷ $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $|i| = 1$ et $\arg(i) \equiv \left(\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$
- ▷ $|1+i| = \sqrt{2}$ et $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ donc $\arg(1+i) \equiv \left(\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$
- ▷ $|\sqrt{3}+i| = 2$ et $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ donc $\arg(\sqrt{3}+i) \equiv \left(\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$

b. Correspondance forme algébrique / forme trigonométrique

Soit z le complexe de forme algébrique $a + ib$ et de forme trigonométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors on a d'une part

$$a = r \cos \theta \quad b = r \sin \theta$$

et d'autre part

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Si z est *non nul*, son module $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ sera non nul également. Ainsi, nous pouvons écrire z sous la forme

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\ &= r \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\ &= r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ainsi, connaissant a et b , on peut obtenir le module et un argument de $a + ib$. On obtiendra une mesure exacte de θ si $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont des valeurs connues comme $1/2$, $\sqrt{3}/2$, 1 , etc.

Sinon, on obtiendra une valeur approchée à l'aide des touches $[\text{COS}^{-1}]$ et $[\text{SIN}^{-1}]$, ou encore avec $[\text{TAN}^{-1}]$. En effet, $\cos(\theta)$ étant non nul^c,

^b Cela doit titiller la mémoire des spécialistes

^c Sinon, on sait qui est θ ...

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = \frac{b}{a}$$

ce qui déterminera une valeur de l'argument modulo π .

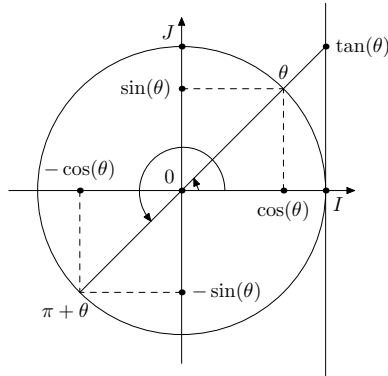


FIG. 5 – La tangente est déterminée à π près

Il suffira ensuite de considérer le signe de $\cos(\theta)$ ou de $\sin(\theta)$ pour savoir à qui on a affaire.

c. Opérations sur les formes trigonométriques

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, alors

$$zz' = rr'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')]$$

Vous qui connaissez parfaitement vos formules d'addition, vous en déduisez que

$$zz' = z = rr'(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'))$$

Ainsi, nous arrivons au résultat capital

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$$

Cela va VOUS permettre de démontrer les propriétés suivantes avec un peu d'astuce et de patience

Propriété 4 Propriétés algébriques des arguments

- ▷ $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$
- ▷ $\arg(z^n) = n\arg(z) [2\pi]$
- ▷ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) [2\pi]$
- ▷ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$
- ▷ $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$
- ▷ $\arg(-z) = \pi + \arg(z) [2\pi]$

En particulier, la formule concernant z^n nous permet d'écrire

Théorème 3 Formule de Moivre

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$$

Nous nous rendons ainsi compte que

Les formes trigonométriques sont adaptés aux produits de complexes

Les formes algébriques sont adaptées aux sommes de complexes

Mais revenons à nos premières amours : calculer en géométrie...

2.4 - LES OBJETS GÉOMÉTRIQUES ET LES COMPLEXES

a. De l'objet au complexe

Comment caractériser un cercle ?

Le cercle de centre A et de rayon R est l'ensemble des points situés à la distance R de A. Il est facile de traduire simplement cela en langage complexe...

$$M(z) \in \mathcal{C}(A, R) \iff |z - z_A| = R$$

Comment caractériser un triangle isocèle ?

C'est encore une histoire de distance, donc de module : ABC est isocèle de sommet principal A si et seulement si $AB = AC$ donc

$$ABC \text{ isocèle de sommet principal A} \iff |z_B - z_A| = |z_C - z_A| \iff \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1$$

Comment caractériser un triangle rectangle ?

On peut encore parler distance grâce au théorème de Pythagore

$$|z_C - z_B|^2 = |z_B - z_A|^2 + |z_C - z_A|^2$$

ou angle droit : mais c'est l'angle géométrique qui nous intéresse, donc nous travaillerons modulo π

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_1}) + (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AC}) = -\arg(z_{\overrightarrow{AB}}) + \arg(z_{\overrightarrow{AC}}) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Comment caractériser les différents quadrilatères ?

Petite révision de collègue...

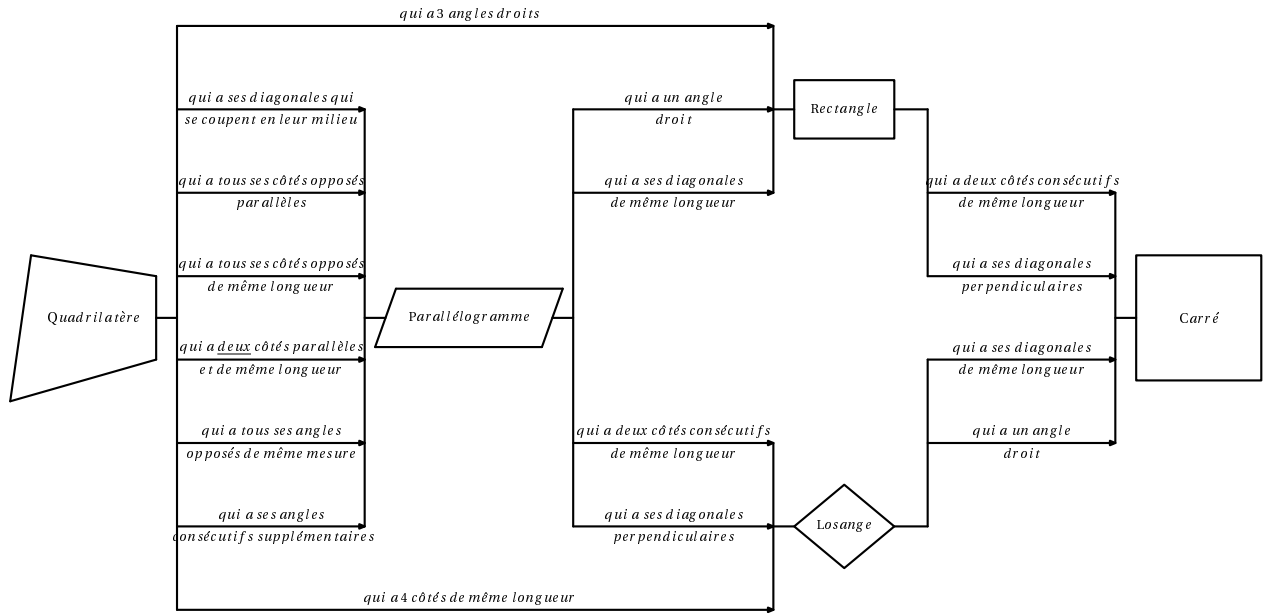


FIG. 6 –

qu’il vous suffira d’adapter connaissant ce qui précède.

b. Du complexe à l’objet

Que représente $z - 32 + 5i$?

Soit A le point d’affixe $32 - 5i$ et M le point d’affixe z , alors $z - 32 + 5i = z_M - z_A = z_{\overrightarrow{AM}}$

Comment interpréter $|z - 32 + 5i| = 3$?

D’après ce qui précède, on aboutit à $AM = 3$: il s’agit donc du cercle de centre A et de rayon 3.

Comment interpréter $|32 + iz| = 5$?

$|32 + iz| = |i(-32i + z)| = |i| \times |z - 32i| = |z - 32i| = BM$ avec M le point d’affixe z et B le point d’affixe $32i$. On retombe donc sur un cercle.

Comment interpréter $|z - a| = |z - b|$?

Soit M d’affixe z , A d’affixe a et B d’affixe b . Alors l’égalité se traduit par $AM = BM$, donc M est équidistant de A et B, donc M est sur la médiatrice de [AB].

Que se cache-t-il derrière le quotient $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$?

Il suffit de remarquer que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$. Donc vous utiliserez le fait que

▷ $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\vec{e}_1, \overrightarrow{AC}) - (\vec{e}_1, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

▷ $\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = \frac{AC}{AB}$

Dans d’autres cas, vous serez confrontés à l’interprétation d’une égalité du style $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \lambda$ qui se traduit par $z_{\overrightarrow{AC}} = \lambda z_{\overrightarrow{AB}}$, donc

- ▷ si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ et donc A, B et C sont alignés.
- ▷ si $\lambda \in i\mathbb{R}$, $z_{\overrightarrow{AC}} = \pm |\lambda| i z_{\overrightarrow{AB}}$ et donc $\arg(z_{\overrightarrow{AC}}) \equiv \pm \frac{\pi}{2} + \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) [2\pi]$ c’est à dire $(AC) \perp (AB)$
- ▷ si $\lambda = \pm i$, alors le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

Comment interpréter $(MA, MB) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$?

On déduit de cette relation que le triangle AMB est rectangle en M, donc que M décrit le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

c. En attendant la deuxième partie du cours...

Soit $z = 3 + 2i$, alors $-1 \times z = -3 - 2i$ et $i \times z = 3i + 2i^2 = -2 + 3i$. Notons M, M' et M'' les points d'affixes respectives z , $-z$ et iz

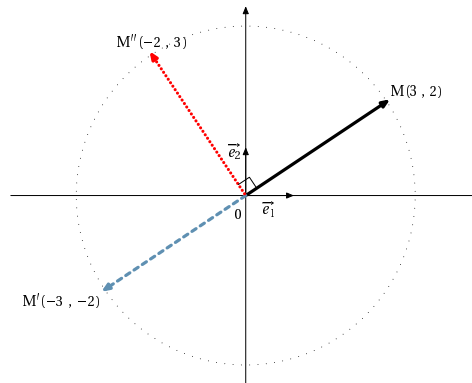


FIG. 7 –

Ô monde merveilleux! Une multiplication par i se traduit par un quart de tour, une multiplication par -1 se traduit par un demi-tour, deux multiplications successives par i , c'est à dire une multiplication par $i^2 = -1$ se traduit bien par deux quarts de tour, *i.e.* un demi tour. Mais ceci est une autre histoire...

2.5 - COMPLEXES ET ÉLECTRONIQUE

a. Somme de deux grandeurs sinusoïdales

On considère la situation suivante :

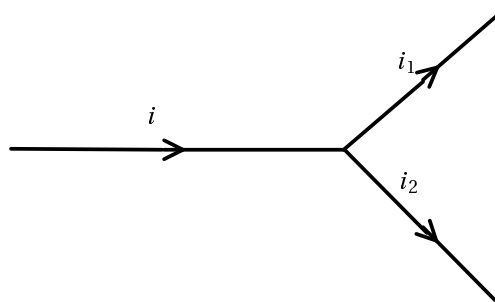


FIG. 8 – Loi des mailles

Le courant initial i et les trois courants résultants i_1 et i_2 ont la même pulsation ω . Si $i_k = \hat{I}_k \sin(\omega t + \varphi)$, alors, en notant I_k la valeur efficace^d de i_k on a

$$\underline{I}_k = [I_k, \varphi] = I_k (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

avec $\hat{I}_k = \sqrt{2} I_k$

^d Nous apprendrons à la calculer quand nous aurons étudié le calcul intégral

La *loi des mailles* nous dit que, à chaque instant t , $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$.

Il est temps à présent de se souvenir d'une petite formule de trigo :

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

Vous pouvez alors montrer que, d'une part

$$i_1(t) + i_2(t) = (\sqrt{2}I_1 \cos \varphi_1 + \sqrt{2}I_2 \cos \varphi_2) \sin(\omega t) + (\sqrt{2}I_1 \sin \varphi_1 + \sqrt{2}I_2 \sin \varphi_2) \cos(\omega t)$$

et d'autre part

$$i(t) = (\sqrt{2}I \cos \varphi) \sin(\omega t) + (\sqrt{2}I \sin \varphi) \cos(\omega t)$$

puisque la relation $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ est vraie à chaque instant, elle est donc vraie en particulier au temps $t = 0$, d'où

$$\sqrt{2}I \sin \varphi = \sqrt{2}I_1 \sin \varphi_1 + \sqrt{2}I_2 \sin \varphi_2$$

(pourquoi?) et en $t = \pi/2\omega$ on obtient

$$\sqrt{2}I \cos \varphi = \sqrt{2}I_1 \cos \varphi_1 + \sqrt{2}I_2 \cos \varphi_2$$

Vous pouvez alors expliquer pourquoi

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

dans le cas de signaux de même pulsation. Cela va nous rendre de grands services, car il va être beaucoup plus simple d'additionner des complexes plutôt que des grandeurs sinusoïdales.

Exemple Considérons $i_1 = 2\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4)$ et $i_2 = 3\sqrt{2}\sin(\omega t - \pi/6)$

Alors vous obtenez d'une part

$$\underline{I}_1 = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2}(1 + j)$$

et d'autre part

$$\underline{I}_2 = 3 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + j \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right) = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - j)$$

Nous en déduisons que

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \left(\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) + j \left(\sqrt{2} - \frac{3}{2} \right)$$

On ne reconnait pas de lignes trigonométriques connues. Nous allons donc utiliser des valeurs approchées.

$$\underline{I} \simeq 4,012289774 - 0,08578643763j$$

Nous en déduisons que l'intensité efficace vaut environ 4,01 Ampères et une mesure de son argument -0,021 radians, et donc

$$i(t) \simeq 4,01\sqrt{2}\sin(\omega t - 0,021)$$

b. Impédance complexe

Vous vous souvenez que l'impédance complexe \underline{Z} est définie par

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + jX$$

avec R la résistance et X la réactance du dipôle..

Cas d'une bobine parfaite

On considère la situation suivante :

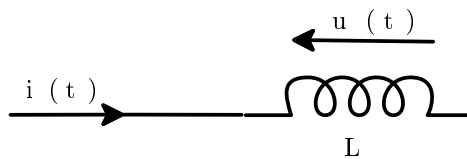


FIG. 9 – Bobine parfaite

Par définition de l'intensité $i(t)$, on a $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$. Or $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$, donc

$$\begin{aligned} u(t) &= L \frac{d(I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi))}{dt} \\ &= LI\sqrt{2}\omega \cos(\omega t + \varphi) \\ &= L\omega I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi + \pi/2) \quad \text{car } \sin(x + \pi/2) = \cos(x) \end{aligned}$$

Donc $\underline{U} = [IL\omega, \varphi + \pi/2]$ et

Nous en déduisons que, d'une part

$$\begin{aligned} \text{Arg}(\underline{Z}) &= \text{Arg}(\underline{U}) - \text{Arg}(\underline{I}) \\ &= \varphi + \pi/2 - \varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} |\underline{Z}| &= |\underline{U}|/|\underline{I}| \\ &= IL\omega/I \\ &= L\omega \end{aligned}$$

Finalement, on obtient que

$$\underline{Z} = \left[L\omega, \frac{\pi}{2} \right] = jL\omega$$

car je vous rappelle que $\left[1, \frac{\pi}{2} \right] = \cos(\pi/2) + j\sin(\pi/2) = j$

Montrez de même que l'impédance complexe d'un condensateur parfait de capacité C vaut $1/j\omega C$ sachant que par définition $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$

Exercice 1 Filtre et inversion complexe

Inversion complexe On considère l'application f du plan complexe dans \mathbb{C} qui à tout point M d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe $1/z$. On pose $z = x + iy$ la forme algébrique de z et $x' + iy'$ celle de l'affixe z' de M' .

1. Exprimez x' et y' en fonction de x et y .
2. Quelle est l'image de M' par f ? Déduisez-en l'expression de x et y en fonction de x' et y' .
3. Soit D une droite d'équation $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Déterminez une équation de l'image de D par f . Déduisez-en la nature de cette image.
4. Cas particulier : déterminez l'image de la droite Δ d'équation $x = 32$.

Un peu d'électronique : étude d'un filtre On bidouille un filtre en mettant deux résistances R et deux condensateurs de capacité C de manière rusée. Quand on applique à l'entrée une certaine tension de pulsation ω , on recueille à la sortie un nouveau signal « filtré » mais de même pulsation. Ce filtre est caractérisé par la fonction de transfert T définie par

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{Z_1(\omega)}{Z_2(\omega)}} \quad \text{avec} \quad Z_1(\omega) = R + \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad Z_2(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega}$$

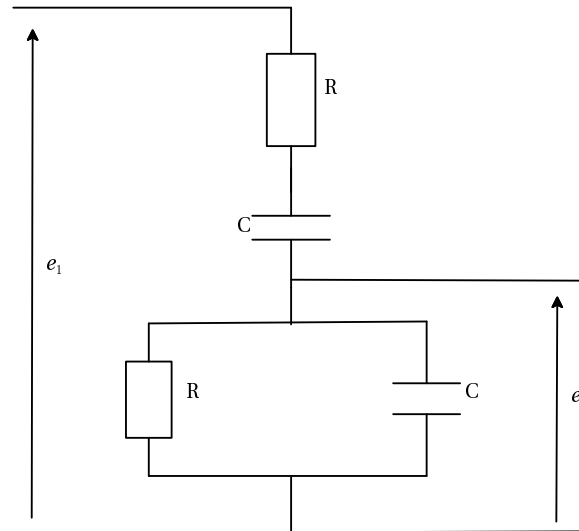


FIG. 10 – Filtre

Justifiez les valeurs trouvées de Z_1 et Z_2

Les constantes R et C sont bien sûr strictement positives. En électronique, on note j le nombre vérifiant $j^2 = -1$ pour ne pas faire de confusion avec l'intensité i .

1. Montrez que $T(\omega) = \frac{1}{3 + j \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)}$

2. a) On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$h(\omega) = RC\omega - \frac{1}{RC\omega}$$

Dressez le tableau de variation de h sur $]0, +\infty[$.

- On considère le point m d'affixe $3 + jh(\omega)$. Quel est l'ensemble (D) décrit par le point m lorsque ω parcourt $]0, +\infty[$?
- Quelle transformation associe au point m le point M d'affixe $Z = T(\omega)$?
- Déduisez-en l'ensemble (E) décrit par le point M quand ω parcourt $]0, +\infty[$.
- Tracez sur un même graphique les ensembles (D) et (E). Vous prendrez pour unité 6cm. Vous représenterez également le point m_0 d'affixe $3 + j$ et son image M_0 par la transformation envisagée.

2.6 - Formulaire de Trigonométrie

▷ Formules

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \text{ pour } a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}, \text{ pour } a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k' \in \mathbb{Z}$$

▷ Transformation de produits en somme

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot (\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} \cdot (\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot (\sin(a + b) + \sin(a - b))$$

▷ Transformation de sommes en produits

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \cdot \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \cdot \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

▷ Formules de duplication

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin(2x) = 2 \cos x \sin x$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}, x \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \text{ pour } k \in \mathbb{Z}$$

Avec $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

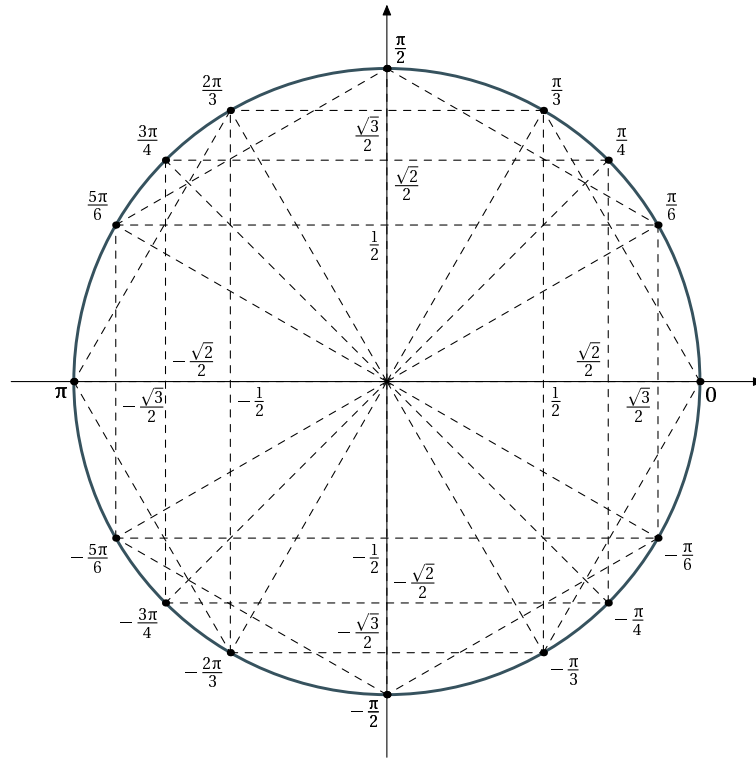


FIG. 11 -

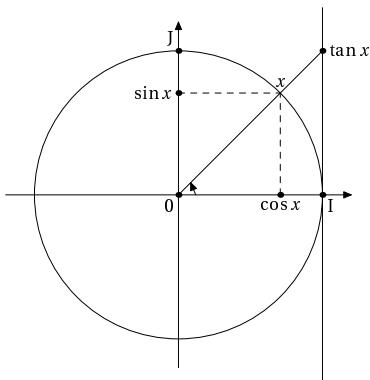


FIG. 12 -

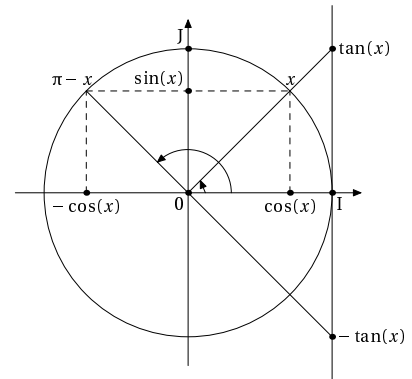


FIG. 13 -

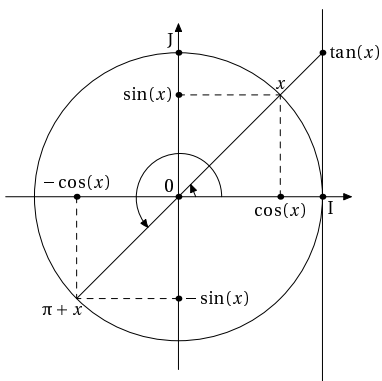


FIG. 14 -

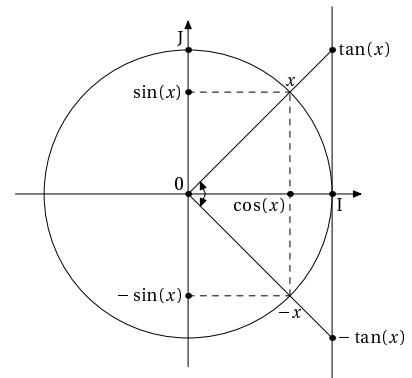


FIG. 15 -