Les Complexes

Guillaume CONNAN

Lycée Jean PERRIN

Octobre 2007

Sommaire

Sommaire

Combien l'équation $\mathbf{x^3+px+q=0}$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{R}$?

Considérons donc la fonction $f : x \mapsto x^3+px+q$ avec p et q des entiers. En étudiant cette fonction, nous allons vérifier qu'elle admet toujours au moins une solution réelle et même déterminer le nombre de solutions selon les valeurs de p et q.

f s'annule-t-elle sur $\mathbb{R}$?

Quel est le signe de la dérivée ?

Distinguons deux cas :

- $\mathbf{p \geqslant 0}$
- $\mathbf{p < 0}$

Distinguons deux cas :

- $\mathbf{p \geqslant 0}$
- $\mathbf{p < 0}$

Tableau de variation dans le 2$^{\text{ème}}$ cas

x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
Signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-a)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$

Montrez que $f(a) = q - 2a^3$ et $f(-a) = q + 2a^3$

Alors $f(a) \cdot f(-a) =$

On peut enfin remarquer que $f(a) < f(-a)$ car

Entamons donc la discussion

- Si $f(a)$ et $f(-a)$ sont tous deux de même signe, c'est à dire si $f(a) \cdot f(-a) > 0$ soit encore si $4p^3 + 27q^2 > 0$ alors f ne s'annule qu'une seule fois.
- Si
- Si

Entamons donc la discussion

- Si $f(a)$ et $f(-a)$ sont tous deux de même signe, c'est à dire si $f(a) \cdot f(-a) > 0$ soit encore si $4p^3 + 27q^2 > 0$ alors f ne s'annule qu'une seule fois.

- Si

- Si

Entamons donc la discussion

- Si $f(a)$ et $f(-a)$ sont tous deux de même signe, c'est à dire si $f(a)\cdot f(-a)>0$ soit encore si $4p^3+27q^2>0$ alors f ne s'annule qu'une seule fois.
- Si
- Si

Plaçons-nous maintenant dans le cas $4p^3 + 27q^2 > 0$. Nous savons qu'alors l'équation admet une unique solution réelle.

Giralomo Cardano a établi[1] en 1547 que cette solution est

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Utilisez cette formule pour trouver une solution de $(E_1)\ :\ x^3-36x-91=0$

[1] Vous pouvez essayer de le prouver en posant $x=u+v$ et en résolvant un système d'équations d'inconnues u et v

Giralomo Cardano a établi[1] en 1547 que cette solution est

$$\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Utilisez cette formule pour trouver une solution de (E_1) : $x^3-36x-91=0$

[1] Vous pouvez essayer de le prouver en posant $x=u+v$ et en résolvant un système d'équations d'inconnues u et v

On voudrait faire de même avec (E_2) : $x^3 - 15x - 4 = 0$. Un problème apparaît...

Admettons qu'on puisse prolonger les calculs usuels aux racines carrées de nombres négatifs en utilisant le « symbole » $\sqrt{-1}$ et utilisons quand même la formule de notre ami italien.

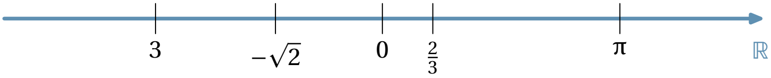
Bon, on ne semble pas très avancé. Alors un petit coup de pouce : calculez $\left(2+\sqrt{-1}\right)^3$ et $\left(2-\sqrt{-1}\right)^3$

On trouve alors une solution réelle α de (E_2). Or $4p^3+27q^2$ est négatif, donc on devrait trouver deux autres racines réelles. Comme on en a une, cela veut dire qu'on peut factoriser $x^3-15x-4$ par $x-\alpha$: faites-le !
Déduisez-en les deux autres solutions réelles.

On trouve alors une solution réelle α de (E_2). Or $4p^3+27q^2$ est négatif, donc on devrait trouver deux autres racines réelles. Comme on en a une, cela veut dire qu'on peut factoriser $x^3-15x-4$ par $x-\alpha$: faites-le ! Déduisez-en les deux autres solutions réelles.

Sommaire

Vous savez « compter en dimension 1 », c'est à dire additionner et multiplier des nombres réels qu'on peut représenter sur la droite des réels :



Dans $\mathbb{R}$

- L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x+0=0+x=x$.
- La somme de 2 réels est encore un réel.
- Chaque réel x admet un opposé $-x$ vérifiant $x+(-x)=(-x)+x=0$.
- La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x\times 1=1\times x=x$
- Le produit de deux réels est encore un réel.
- Chaque réel différent de 0 admet un inverse x^{-1} vérifiant $x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1$
- La multiplication est distributive sur l'addition : $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$.

Dans $\mathbb{R}$

- L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x+0=0+x=x$.
- La somme de 2 réels est encore un réel.
- Chaque réel x admet un opposé $-x$ vérifiant $x+(-x)=(-x)+x=0$.
- La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x\times 1=1\times x=x$
- Le produit de deux réels est encore un réel.
- Chaque réel différent de 0 admet un inverse x^{-1} vérifiant $x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1$
- La multiplication est distributive sur l'addition : $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$.

Dans $\mathbb{R}$

- L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x+0=0+x=x$.
- La somme de 2 réels est encore un réel.
- Chaque réel x admet un opposé $-x$ vérifiant $x+(-x)=(-x)+x=0$.
- La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x\times 1=1\times x=x$
- Le produit de deux réels est encore un réel.
- Chaque réel différent de 0 admet un inverse x^{-1} vérifiant $x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1$
- La multiplication est distributive sur l'addition : $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$.

Dans $\mathbb{R}$

- L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x+0=0+x=x$.
- La somme de 2 réels est encore un réel.
- Chaque réel x admet un opposé $-x$ vérifiant $x+(-x)=(-x)+x=0$.
- La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x\times 1=1\times x=x$
- Le produit de deux réels est encore un réel.
- Chaque réel différent de 0 admet un inverse x^{-1} vérifiant $x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1$
- La multiplication est distributive sur l'addition : $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$.

Dans $\mathbb{R}$

- L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x+0=0+x=x$.
- La somme de 2 réels est encore un réel.
- Chaque réel x admet un opposé $-x$ vérifiant $x+(-x)=(-x)+x=0$.
- La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x\times 1=1\times x=x$
- Le produit de deux réels est encore un réel.
- Chaque réel différent de 0 admet un inverse x^{-1} vérifiant $x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1$
- La multiplication est distributive sur l'addition : $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$.

Dans $\mathbb{R}$

- L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x+0=0+x=x$.
- La somme de 2 réels est encore un réel.
- Chaque réel x admet un opposé $-x$ vérifiant $x+(-x)=(-x)+x=0$.
- La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x\times 1=1\times x=x$
- Le produit de deux réels est encore un réel.
- Chaque réel différent de 0 admet un inverse x^{-1} vérifiant $x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1$
- La multiplication est distributive sur l'addition : $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$.

Dans $\mathbb{R}$

- L'addition possède un élément neutre noté 0 : $x+0=0+x=x$.
- La somme de 2 réels est encore un réel.
- Chaque réel x admet un opposé $-x$ vérifiant $x+(-x)=(-x)+x=0$.
- La multiplication possède un élément neutre noté 1 : $x\times 1=1\times x=x$
- Le produit de deux réels est encore un réel.
- Chaque réel différent de 0 admet un inverse x^{-1} vérifiant $x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1$
- La multiplication est distributive sur l'addition : $x\times(y+z)=x\times y+x\times z$.

On note $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des coordonnées des points du plan.
Est-ce qu'on peut définir une addition et une multiplication qui engloberaient et généraliseraient celles vues dans $\mathbb{R}$?

On note $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des coordonnées des points du plan.
Est-ce qu'on peut définir une addition et une multiplication qui engloberaient et généraliseraient celles vues dans $\mathbb{R}$?

Pour l'addition, on pense à $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$

Vérifions que les propriétés de l'addition sont vérifiées.

Pour l'addition, on pense à $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$
Vérifions que les propriétés de l'addition sont vérifiées.

Élément neutre

On a un élément neutre : $(0,0)$ car $(x,y)+(0,0)=(x+0,y+0)=(x,y)$.
Et surtout l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ se situe « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$: on l'a juste « gonflé » d'un deuxième zéro pour être reconnu dans $\mathbb{R}^2$.

Élément neutre

On a un élément neutre : (0,0) car $(x,y)+(0,0)=(x+0,y+0)=(x,y)$.
Et surtout l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$ se situe « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$: on l'a juste « gonflé » d'un deuxième zéro pour être reconnu dans $\mathbb{R}^2$.

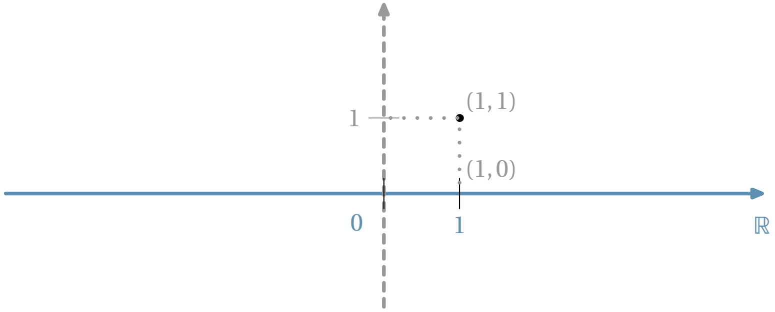
Symétrique

Et pour le symétrique, on prend $(-x,-y)$ car $(x,y)+(-x,-y)=(0,0)$ l'élément neutre.

Multiplication

On pense d'abord à $(x,y)\times(x',y')=(xx',yy')$ avec $(1,1)$ comme élément neutre.

Mais dans ce cas, l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{R}^2$ ne serait pas « au même endroit » que celui de $\mathbb{R}$



On voudrait plutôt un élément neutre (1,0) et donc que $(x,y)\times(1,0)=(x,y)$. Je vous propose la multiplication suivante

$$(x,y)\times(x',y')=(xx'-yy',xy'+x'y)$$

Essayons : $(x,y)\times(1,0)=(x\times 1-y\times 0, x\times 0+y\times 1)=(x,y)$. Ça marche.

Je vous laisse vérifier que cette multiplication est distributive sur l'addition et que tout élément (x,y) de $\mathbb{R}^2$ différent de $(0,0)$ admet un inverse $\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, -\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$.

Oui, bon d'accord, mais quel est le lien avec le $\sqrt{-1}$ du paragraphe précédent ?

Et bien observez $(0,1)$ et élevez le au carré.

$(0,1) \times (0,1) = (0-1, 0+0) = (-1,0)$

Bon et alors ?

$(0,1) \times (0,1) = (0-1, 0+0) = (-1,0)$

Bon et alors ?

Alors $(-1,0)$, c'est le réel -1 « gonflé ». Donc $\sqrt{-1}$ a un « représentant » dans $\mathbb{R}^2$. Dans le plan, il correspond au point de coordonnées $(0,1)$. Et donc nous allons pouvoir calculer avec ce fameux nombre $\sqrt{-1}$ assez naturellemnt en utilisant les opérations décrites précédemment.

À chaque élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ nous allons faire correspondre un nombre qu'on qualifiera de *complexe*.

Nous allons même donner un nom à ce $\sqrt{-1}$: appelons-le i pour qu'il fasse moins peur. Ainsi nous avons les correspondances

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Le point M} & \longleftrightarrow & \text{Le couple } (x,y) & \longleftrightarrow & \text{Le nombre complexe } x+iy \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{Le plan } \mathscr{P} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longleftrightarrow & \text{L'ensemble des nombres comp}
\end{array}$$

Nous allons même donner un nom à ce $\sqrt{-1}$: appelons-le i pour qu'il fasse moins peur. Ainsi nous avons les correspondances

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Le point M} & \longleftrightarrow & \text{Le couple } (x,y) & \longleftrightarrow & \text{Le nombre complexe } x+iy \\
\updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{Le plan } \mathscr{P} & \longleftrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longleftrightarrow & \text{L'ensemble des nombres comp}
\end{array}$$

Et maintenant observez comme les calculs deviennent faciles en prologeant les règles valables sur $\mathbb{R}$!

- $(x+iy)+(x'+iy') = x+iy+x'+iy' = (x+x')+i(y+y')$
- Comme nous avions $(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$, mais en plus simple.
- Et $(x+iy)\cdot(x'+iy') = xx'+ixy'+iyx'+i^2yy'$
- N'oubliez pas que $i^2=-1$
- Alors $(x+iy)\cdot(x'+iy') = (xx'-yy')+i(xy'+yx')$
- Comme nous avions $(x,y)\times(x',y') = (xx'-yy',xy'+yx')$.

Et maintenant observez comme les calculs deviennent faciles en prologeant les règles valables sur $\mathbb{R}$!

- $(x+iy)+(x'+iy') = x+iy+x'+iy' = (x+x')+i(y+y')$
- Comme nous avions $(x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$, mais en plus simple.
- Et $(x+iy)\cdot(x'+iy') = xx'+ixy'+iyx'+i^2yy'$
- N'oubliez pas que $i^2 = -1$
- Alors $(x+iy)\cdot(x'+iy') = (xx'-yy')+i(xy'+yx')$
- Comme nous avions $(x,y)\times(x',y') = (xx'-yy', xy'+yx')$.

Et maintenant observez comme les calculs deviennent faciles en prologeant les règles valables sur $\mathbb{R}$!

- $(x+iy)+(x'+iy') = x+iy+x'+iy' = (x+x')+i(y+y')$
- Comme nous avions $(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$, mais en plus simple.
- Et $(x+iy)\cdot(x'+iy') = xx'+ixy'+iyx'+i^2yy'$
- N'oubliez pas que $i^2 = -1$
- Alors $(x+iy)\cdot(x'+iy') = (xx'-yy')+i(xy'+yx')$
- Comme nous avions $(x,y)\times(x',y') = (xx'-yy',xy'+yx')$.

Et maintenant observez comme les calculs deviennent faciles en prologeant les règles valables sur $\mathbb{R}$!

- $(x+iy)+(x'+iy') = x+iy+x'+iy' = (x+x')+i(y+y')$
- Comme nous avions $(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$, mais en plus simple.
- Et $(x+iy)\cdot(x'+iy') = xx'+ixy'+iyx'+i^2yy'$
- N'oubliez pas que $i^2=-1$
- Alors $(x+iy)\cdot(x'+iy') = (xx'-yy')+i(xy'+yx')$
- Comme nous avions $(x,y)\times(x',y') = (xx'-yy',xy'+yx')$.

Et maintenant observez comme les calculs deviennent faciles en prologeant les règles valables sur $\mathbb{R}$!

- $(x+iy)+(x'+iy') = x+iy+x'+iy' = (x+x')+i(y+y')$
- Comme nous avions $(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$, mais en plus simple.
- Et $(x+iy)\cdot(x'+iy') = xx'+ixy'+iyx'+i^2yy'$
- N'oubliez pas que $i^2 = -1$
- Alors $(x+iy)\cdot(x'+iy') = (xx'-yy')+i(xy'+yx')$
- Comme nous avions $(x,y)\times(x',y') = (xx'-yy',xy'+yx')$.

Et maintenant observez comme les calculs deviennent faciles en prologeant les règles valables sur $\mathbb{R}$!

- $(x+iy)+(x'+iy') = x+iy+x'+iy' = (x+x')+i(y+y')$
- Comme nous avions $(x,y)+(x',y') = (x+x',y+y')$, mais en plus simple.
- Et $(x+iy)\cdot(x'+iy') = xx'+ixy'+iyx'+i^2yy'$
- N'oubliez pas que $i^2 = -1$
- Alors $(x+iy)\cdot(x'+iy') = (xx'-yy')+i(xy'+yx')$
- Comme nous avions $(x,y)\times(x',y') = (xx'-yy',xy'+yx')$.

Donc nous allons pouvoir calculer en dimension 2 en généralisant les règles de dimension 1. Nous avons juste ajouté ce nombre i de carré -1. En particulier, tous les nombres réels sont des nombres complexes : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Nous allons pouvoir associer à chacun de ces nombres réels un point du plan et donc associer des transformations du plan à des calculs dans $\mathbb{C}$: on va résoudre des problèmes de géométrie par le calcul.

Donc nous allons pouvoir calculer en dimension 2 en généralisant les règles de dimension 1. Nous avons juste ajouté ce nombre i de carré -1. En particulier, tous les nombres réels sont des nombres complexes : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Nous allons pouvoir associer à chacun de ces nombres réels un point du plan et donc associer des transformations du plan à des calculs dans $\mathbb{C}$: on va résoudre des problèmes de géométrie par le calcul.

L'ensemble $\mathbb{C}$

Théorème

On définit un ensemble $\mathbb{C}$

- *muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de* $\mathbb{R}$
- *contenant un nombre* i *vérifiant* $i^2 = -1$
- *tel que chaque élément* z *de* $\mathbb{C}$ *peut s'écrire de manière* ***unique*** *sous la forme*

$$z = a + ib \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels}$$

L'ensemble $\mathbb{C}$

Théorème

On définit un ensemble $\mathbb{C}$

- *muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$*
- *contenant un nombre i vérifiant $i^2 = -1$*
- *tel que chaque élément z de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière **unique** sous la forme*

$$z = a + ib \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels}$$

L'ensemble $\mathbb{C}$

Théorème

On définit un ensemble $\mathbb{C}$

- *muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$*
- *contenant un nombre i vérifiant $i^2 = -1$*
- *tel que chaque élément z de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière **unique** sous la forme*

$$z = a + ib \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels}$$

L'ensemble $\mathbb{C}$

Théorème

On définit un ensemble $\mathbb{C}$

- *muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$*
- *contenant un nombre i vérifiant $i^2 = -1$*
- *tel que chaque élément z de $\mathbb{C}$ peut s'écrire de manière* ***unique*** *sous la forme*

$$z = a + ib \quad \text{avec } a \text{ et } b \text{ des nombres réels}$$

Sommaire

Cette écriture unique est appelée **forme algébrique** du réel z.
Le nombre a est appellé **partie réelle** de z et notée $\mathscr{R}e(z)$
Le nombre b est appellé **partie imaginaire** de z et notée $\mathscr{I}m(z)$

Cette écriture unique est appelée **forme algébrique** du réel z.
Le nombre a est appellé **partie réelle** de z et notée $\mathscr{R}e(z)$
Le nombre b est appellé **partie imaginaire** de z et notée $\mathscr{I}m(z)$

Cette écriture unique est appelée **forme algébrique** du réel z.
Le nombre a est appellé **partie réelle** de z et notée $\mathscr{R}e(z)$
Le nombre b est appellé **partie imaginaire** de z et notée $\mathscr{I}m(z)$

Sommaire

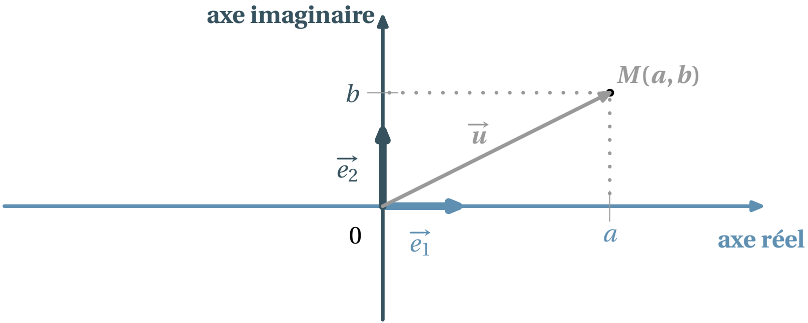
Par exemple, après maints calculs savants, vous arrivez au résultat $2x+3y-5+i(7x-32y+1)=0$ avec x et y des réels.

Ainsi, une équation complexe revient à deux équations réelles (bienvenue dans la deuxième dimension...) et donc

$$2x+3y-5+i(7x-32y+1)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-5=0 \\ 7x-32y+1=0 \end{cases}$$

Sommaire

Nous avons vu que chaque nombre complexe peut être associé à un point du plan qu'on munit d'un repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$



Sommaire

Propriété

$z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}}$

De même, si λ est un nombre réel

Propriété

$z_{\lambda\vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}$

Alors, si I est le **milieu** du segment $[A, B]$, on a

Propriété

$$z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$$

Plus généralement, si G est le barycentre du système $\left\{(A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),\cdots,(A_n\alpha_n)\right\}$ alors

Propriété

$$z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \cdots \alpha_n z_{A_n}}{\alpha 1 + \alpha 2 + \cdots \alpha_n}$$

Pour tous points A et B

Propriété

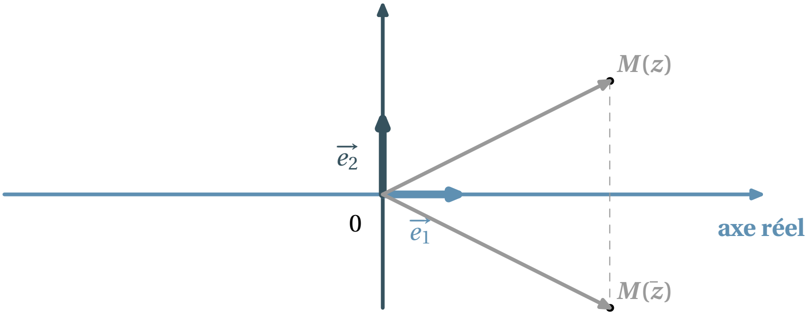
$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

Sommaire

Définition

On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre

$$\overline{z} = a - ib$$



Propriété

- $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$
- $\mathscr{R}e(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathscr{I}m(z) = \dfrac{1}{2}(z - \overline{z})$
- Si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

Propriété

- $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$
- $\mathscr{R}e(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathscr{I}m(z) = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$
- Si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

Propriété

- $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$
- $\mathscr{R}e(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathscr{I}m(z) = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$
- Si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

Propriété

- $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$
- $\mathcal{R}e(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathcal{I}m(z) = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$
- Si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

Propriété

- $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$
- $\mathscr{R}e(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathscr{I}m(z) = \dfrac{1}{2}(z - \overline{z})$
- Si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

Propriété

- $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \; \overline{z_2}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$
- $\mathscr{R}e(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathscr{I}m(z) = \dfrac{1}{2}(z - \overline{z})$
- Si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

Propriété

- $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$
- $\mathscr{R}e(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathscr{I}m(z) = \dfrac{1}{2}(z - \overline{z})$
- Si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

Propriété

- $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \vec{e_1})$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$
- $\mathscr{R}e(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathscr{I}m(z) = \dfrac{1}{2}(z - \overline{z})$
- Si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

Propriété

- $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \vec{e_1})$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$
- $\mathscr{R}e(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathscr{I}m(z) = \dfrac{1}{2}(z - \overline{z})$
- Si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

Propriété

- $M(z)$ et $M'(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{e_1})$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \ \overline{z_2}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$
- $\mathscr{R}e(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathscr{I}m(z) = \dfrac{1}{2}(z - \overline{z})$
- Si $z = a + ib$, alors $z\overline{z} = a^2 + b^2$

Sommaire

À montrer qu'un complexe est un réel

En effet, si on arrive à montrer que $\overline{z} = z$, alors on en conclut que z est réel.

À rendre réel des dénominateurs pour obtenir des formes algébriques

En effet,

$$z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$$

Exercice

Donnez la forme algébrique de l'inverse de $2+i$

Sommaire

Définition

Le module du complexe z est le réel positif noté $|z|$ tel que

$$|z| = \sqrt{z\ \overline{z}}$$

Remarques

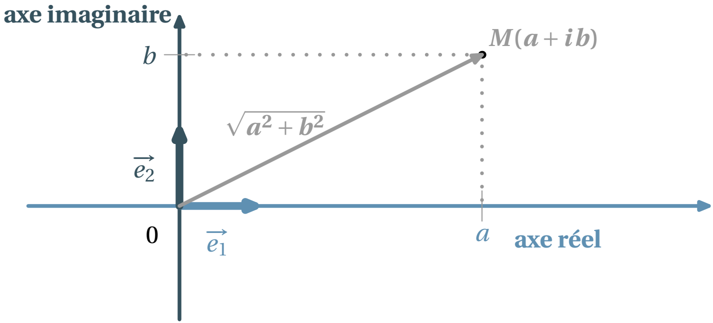
- Cette définition en est bien une car $z\ \overline{z} = a^2 + b^2$ d'après notre étude sur les conjugués.
- Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\ \overline{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\overline{a} = a$. Donc le module de a est bien la valeur absolue de a et notre notation est cohérente.
  La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Remarques

- Cette définition en est bien une car $z\,\overline{z} = a^2 + b^2$ d'après notre étude sur les conjugués.
- Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\,\overline{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\overline{a} = a$. Donc le module de a est bien la valeur absolue de a et notre notation est cohérente. La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Remarques

- Cette définition en est bien une car $z\ \overline{z} = a^2 + b^2$ d'après notre étude sur les conjugués.
- Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\ \overline{a}} = \sqrt{aa} = \sqrt{a^2}$ car $\overline{a} = a$. Donc le module de a est bien la valeur absolue de a et notre notation est cohérente.
  La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.



axe imaginaire
$M(a+ib)$
b
$\sqrt{a^2+b^2}$
$\overrightarrow{e_2}$
0
$\overrightarrow{e_1}$
a
axe réel

Propriété

$|z_M| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM \qquad \left|z_{\overrightarrow{u}}\right| = \|\overrightarrow{u}\|$

Propriété

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\mathscr{R}e(z) \leqslant |z|$
- $\mathscr{I}m(z) \leqslant |z|$

Propriété

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\mathscr{R}e(z) \leqslant |z|$
- $\mathscr{I}m(z) \leqslant |z|$

Propriété

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\mathscr{R}e(z) \leqslant |z|$
- $\mathscr{I}m(z) \leqslant |z|$

Propriété

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\mathscr{R}e(z) \leqslant |z|$
- $\mathscr{I}m(z) \leqslant |z|$

Propriété

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\mathscr{R}e(z) \leqslant |z|$
- $\mathscr{I}m(z) \leqslant |z|$

Propriété

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\mathscr{R}e(z) \leqslant |z|$
- $\mathscr{I}m(z) \leqslant |z|$

Sommaire

Théorème

L'équation $ax^2+bx+c=0$ *admet toujours des solutions sur* $\mathbb{C}$*.*
Notons $\Delta = b^2-4ac$ *le* ***discriminant*** *de l'équation*

- *Si* $\Delta = 0$*, il existe une unique solution* $x = -\dfrac{b}{2a}$
- *Si* $\Delta > 0$*, il existe deux solutions réelles* $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- *Si* $\Delta < 0$*, il existe deux solutions complexes conjuguées* $x = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Théorème

L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet toujours des solutions sur $\mathbb{C}$.
Notons $\Delta = b^2-4ac$ le ***discriminant*** *de l'équation*

- *Si $\Delta = 0$, il existe une unique solution $x = -\dfrac{b}{2a}$*
- *Si $\Delta > 0$, il existe deux solutions réelles $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$*
- *Si $\Delta < 0$, il existe deux solutions complexes conjuguées $x = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$*

Théorème

L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet toujours des solutions sur $\mathbb{C}$.
*Notons $\Delta=b^2-4ac$ le **discriminant** de l'équation*

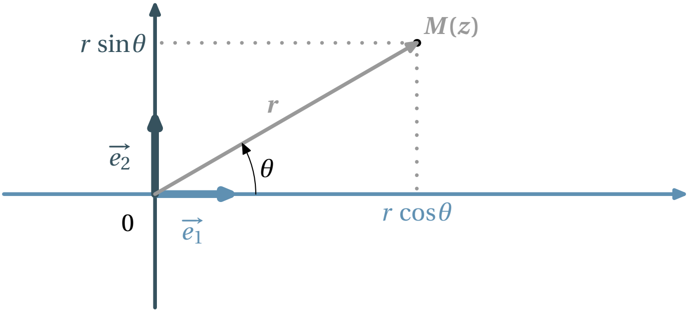
- *Si $\Delta=0$, il existe une unique solution $x=-\dfrac{b}{2a}$*
- *Si $\Delta>0$, il existe deux solutions réelles $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$*
- *Si $\Delta<0$, il existe deux solutions complexes conjuguées $x=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$*

Théorème

L'équation $ax^2+bx+c=0$ admet toujours des solutions sur $\mathbb{C}$.
Notons $\Delta=b^2-4ac$ le ***discriminant*** *de l'équation*

- *Si $\Delta=0$, il existe une unique solution $x=-\dfrac{b}{2a}$*
- *Si $\Delta>0$, il existe deux solutions réelles $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$*
- *Si $\Delta<0$, il existe deux solutions complexes conjuguées $x=\dfrac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$*

Sommaire



(r,θ) étant le couple de coordonnées polaires de l'image M de z, on a $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$ déterminé de manière unique, car c'est en fait une forme algébrique déguisée : on l'appelle **forme trigonométrique** du complexe z.

Définition

$x \equiv y[2\pi] \Longleftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + 2k\pi$

Soit z le complexe de forme algébrique $a+ib$ et de forme trigonométrique $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ alors :

- $a = r\cos\theta \qquad b = r\sin\theta$
- $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Soit z le complexe de forme algébrique $a+ib$ et de forme trigonométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors :

- $a = r\cos\theta \qquad b = r\sin\theta$
- $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

- $1 = \cos 0 + i \sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) \equiv 0[2\pi]$
- $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $|i| = 1$ et $\arg(i) \equiv \left(\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$
- $|1+i| = \sqrt{2}$ et $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ donc $\arg(1+i) \equiv \left(\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$
- $|\sqrt{3}+i| = 2$ et $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ donc $\arg(\sqrt{3}+i) \equiv \left(\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$

- $1 = \cos 0 + i \sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) \equiv 0[2\pi]$
- $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $|i| = 1$ et $\arg(i) \equiv \left(\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$
- $|1+i| = \sqrt{2}$ et $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ donc $\arg(1+i) \equiv \left(\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$
- $|\sqrt{3}+i| = 2$ et $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ donc $\arg(\sqrt{3}+i) \equiv \left(\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$

- $1 = \cos 0 + i \sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) \equiv 0[2\pi]$
- $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $|i| = 1$ et $\arg(i) \equiv \left(\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$
- $|1+i| = \sqrt{2}$ et $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ donc $\arg(1+i) \equiv \left(\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$
- $|\sqrt{3}+i| = 2$ et $\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ donc $\arg(\sqrt{3}+i) \equiv \left(\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$

- $1 = \cos 0 + i \sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) \equiv 0[2\pi]$
- $i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $|i| = 1$ et $\arg(i) \equiv \left(\frac{\pi}{2}\right)[2\pi]$
- $|1+i| = \sqrt{2}$ et $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ donc $\arg(1+i) \equiv \left(\frac{\pi}{4}\right)[2\pi]$
- $|\sqrt{3}+i| = 2$ et $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ donc $\arg(\sqrt{3}+i) \equiv \left(\frac{\pi}{6}\right)[2\pi]$

Sommaire

- $a = r\cos\theta \qquad b = r\sin\theta$
- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- $a = r\cos\theta \qquad b = r\sin\theta$
- $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Sommaire

Propriété

$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \, [2\pi]$

Propriété

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)\ [2\pi]$

Propriété

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)\ [2\pi]$

Propriété

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(z^n) = n \arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)\ [2\pi]$

Propriété

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)\ [2\pi]$

Propriété

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)\ [2\pi]$

Propriété

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)\,[2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\,[2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\,[2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\,[2\pi]$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)\,[2\pi]$

Propriété

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) = \pi + \arg(z)\ [2\pi]$

Formule de Moivre

Théorème

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$$

Comment caractériser un cercle ?

Comment caractériser un triangle isocèle ?

Comment caractériser un triangle rectangle ?

Comment caractériser les différents quadrilatères ?

Que représente $z - 32 + 5i$?

Comment interpréter $|z - 32 + 5i| = 3$?

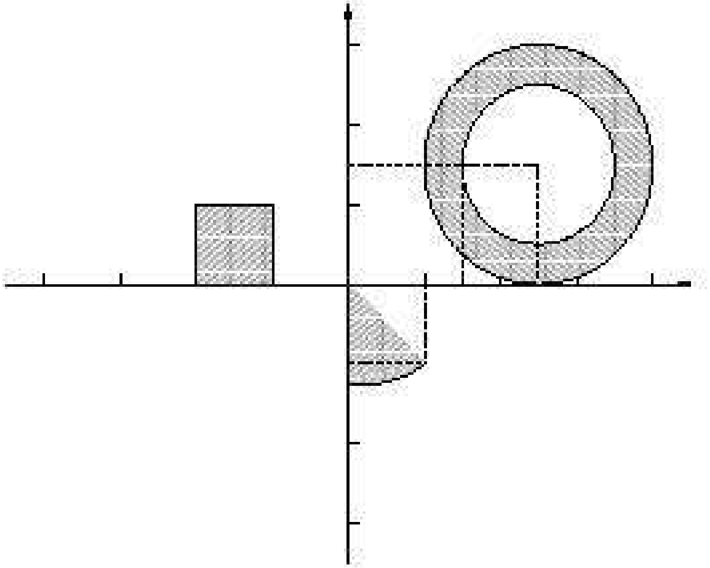
Comment interpréter $|32 + iz| = 5$?

Comment interpréter $|z-a| = |z-b|$?

Que se cache-t-il derrière le quotient $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$?

Comment interpréter $(MA, MB)\, equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$?

Exercice



Exercice