Corrigé Bac S spécialité France juin 2008
à l'aide de XCAS

Guillaume CONNAN
http://gconnan.free.fr

23 juin 2008

EXERCICE 1

1.
```
I:=Int(ln(x),x,1,e)
```

$$\int_1^{e^1} \ln(x)\, dx$$

```
J:=Int((ln(x))^2,x,1,e)
```

$$\int_1^{e^1} \ln(x)^2\, dx$$

   (a)
```
F(x):=x*ln(x)-x
```

(x)→x*ln(x)-x

```
deriver(F(x))
```

$$\ln(x) + 1 - 1$$

On en déduit I :

```
simplifier(F(e)-F(1))
```

$$1$$

   (b) Intégrons par parties J : $\begin{cases} u(x) = \ln(x) & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = \ln(x) & v(x) = \mathrm{F}(x) \end{cases}$

On obtient :

$$\mathrm{J} = \Big[\ln(x)\mathrm{F}(x)\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \ln(x) - 1\,\mathrm{d}x = 0 - \mathrm{I} + (\mathrm{e}-1) = \mathrm{e} - 1 - \mathrm{I}$$

Or $\mathrm{I} = 1$ donc finalement $\boxed{\mathrm{J} = \mathrm{e} - 2\mathrm{I}}$.

   (c) On en déduit que $\mathrm{J} = e - 2$

On vérifie à l'aide de XCAS :

```
int((ln(x))^2,x,1,e)
```

$$e^1 - 2$$

(d) Par lecture du graphique, $\boxed{\mathrm{A} = \int_1^{\mathrm{e}} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{I} - \mathrm{J} = 3 - \mathrm{e}}$

On vérifie à l'aide de XCAS :

```
int(ln(x)-(ln(x))^2,x,1,e)
```

$$-\left(e^1\right) + 3$$

2. Les coordonnées de M sont $(x, \ln(x))$ et celles de N $(x, (\ln(x))^2)$ donc

$$\mathrm{MN} = \ln(x) - (\ln(x))^2 = f(x) - g(x)$$

Notons $d = f - g$. Étudions la fonction d sur $[1\,;\mathrm{e}]$.

```
d(x):=ln(x)-(ln(x))^2
```

(x)→ln(x)-ln(x)^2

Calculons $d'(x)$:

```
dp:=factoriser(deriver(d(x)))
```

$$\frac{(-(2\ln(x)) + 1)}{x}$$

Étudions son signe :

```
resoudre(dp>0)
```

$$[(x > 0) \text{ and } (x < (e^{\frac{1}{2}}))]$$

Calculons les valeurs particulières :

```
d(1),d(exp(1/2)),d(e)
```

$$0, \frac{1}{4}, 0$$

On en déduit le tableau suivant :

x	1		$e^{\frac{1}{2}}$		e^1
Signe de $d'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de d	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Le maximum est donc atteint en $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ et vaut $\frac{1}{4}$

EXERCICE 2

On vide les mémoires :

```
restart(NULL):;
```

1. (a)
```
A:=point(1,1,0):;B:=point(1,2,1):;C:=point(3,-1,2):;
```

$$\text{Done}, \text{Done}, \text{Done}$$

```
coordonnees(vecteur(A,B))
```

$$[0,1,1]$$

```
coordonnees(vecteur(A,C))
```

$$[2,-2,2]$$

Les coordonnées des deux vecteurs n'étant pas proportionnelles, on en déduit que les points ne sont pas alignés.

(b) On vérifie que A, B et C appartiennent au plan d'équation $2x+y-z-3=0$.

```
f(C):=2*C[0]+C[1]-C[2]-3:;
```

```
f(coordonnees(A)), f(coordonnees(B)), f(coordonnees(C))
```

$$0,0,0$$

Les points étant non-alignés, ils définissent le plan.

2. On résout le système $\begin{cases} x+2y-z-4=0 \\ 2x+3y-2z-5=0 \end{cases}$ en prenant z comme paramètre :

```
resoudre([x+2*y-t-4=0,2*x+3*y-2*t-5=0],[x,y])
```

$$\begin{pmatrix} t-2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Comme $(P) \cap (Q) = (D)$, l'intersection des trois plans est donc égale à $(ABC) \cap (D)$.
Un point de (D) ayant pour coordonnées $(-2+t, 3, t)$, il appartient à (ABC) si, et seulement si, ses coordonnées vérifient l'équation de (ABC) :

```
resoudre(f([-2+t,3,t])=0,t)
```

$$[4]$$

On obtient $t=4$: les trois plans se coupent donc au point de coordonnées $(2,3,4)$.
On vérifie avec XCAS :

```
resoudre([x+2*y-z-4=0,2*x+3*y-2*z-5=0,f([x,y,z])=0],[x,y,z])
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Soit H le projeté orthogonal de A sur (D). Alors la distance cherchée est égale à AH.
Comme H appartient à (D), il existe un réel t tel que les coordonnées de H soient $(-2+t, 3, t)$.
Un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de (D) a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. On a donc $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u} = O$. Le réel t est donc solution de l'équation $(-2+t)\times 1 + 3\times 0 + t\times 1 = 0$.

```
H:=point(-2+h,3,h):;
```

```
S:=resoudre(produit_scalaire(vecteur(A,H),vecteur([1,0,1]))=0,h)
```

$$[\frac{3}{2}]$$

```
H:=point(-2+S[0],3,S[0]):;coordonnees(vecteur(A,H))
```

$$\text{Done}, [\frac{-3}{2}, 2, \frac{3}{2}]$$

```
distance(A,H)
```

$$\frac{\sqrt{34}}{2}$$

On vérifie :

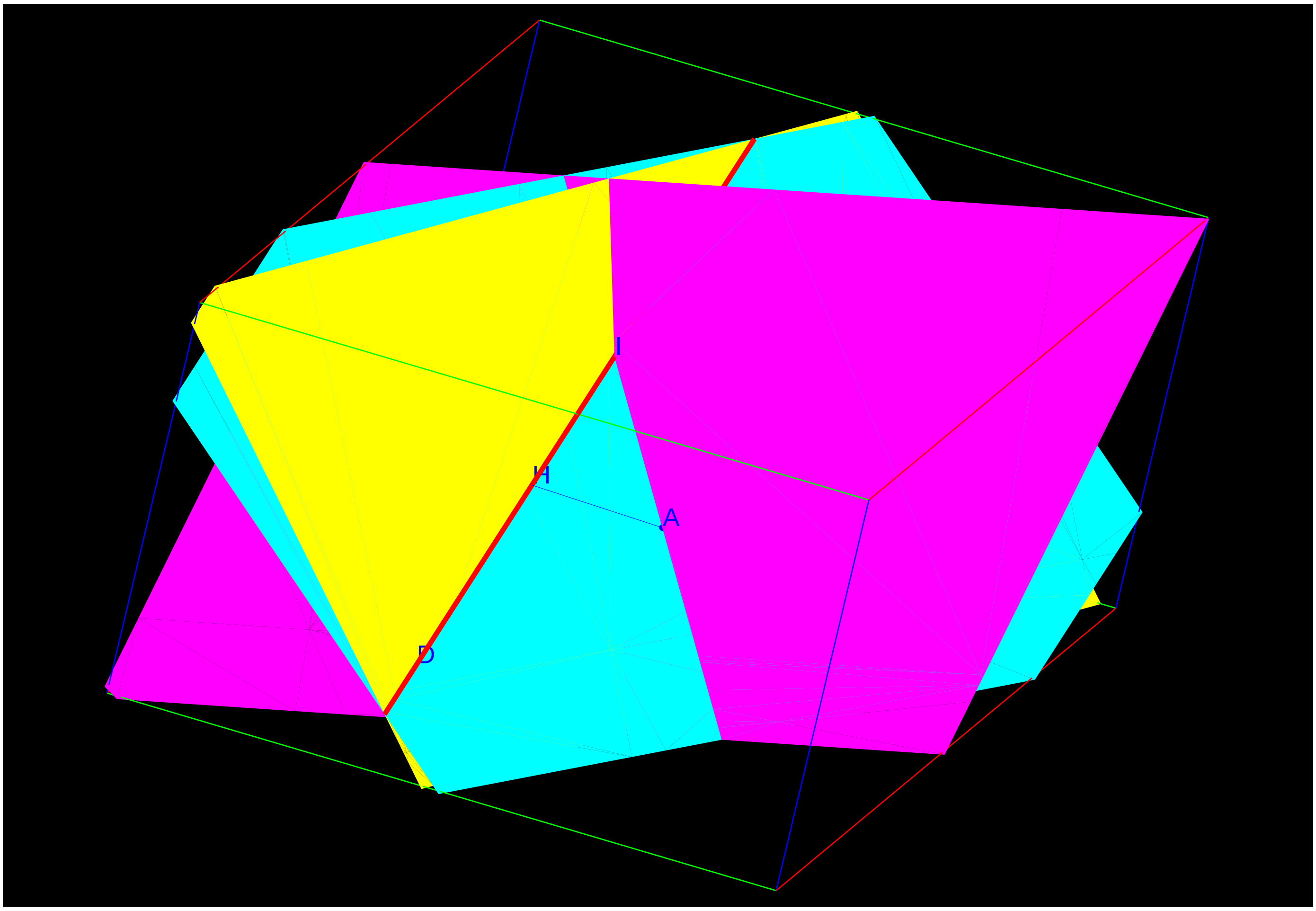
```
D:=droite([-2+t,3,t],t):;
```

```
distance(A,D)
```

$$\frac{\sqrt{34}}{2}$$

Voici la figure :

```
P:=color(plan(x+2*y-z-4=0),jaune+rempli);
Q:=color(plan(2*x+3*y-2*z-5=0),cyan+rempli);
ABC:=color(plan(2*x+y-z-3=0),magenta+rempli);
D:=inter(P,Q)[0];
I:=inter(D,ABC);
A:=point(1,1,0);
H:=projection(D,A);
segment(A,H);
```



Exercice 3

```
restart(NULL):;
```

1. (a) $R(t) = 1 - P(X \leqslant t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - \left(-e^{-\lambda t} + 1\right) = e^{-\lambda t}$

```
assume(t>0):;
```

```
R(t):=simplifier(1-int(k*exp(-k*x),x,0,t)):;
```

```
R(t)
```

$$e^{-(kt)}$$

   (b) $P_{X>t}(X > t+s) = \frac{P\left((X>t)\cap(X>t+s)\right)}{P(X>t)} = \frac{P(X>t+s)}{P(X>t)} = \frac{R(t+s)}{R(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda(t+s-t)} = R(s)$ qui est indépendant de t.

2. (a) $P(X \leqslant t) = 1 - R(t)$ donc :

```
k:=0.00026:;
```

```
1-R(1000)
```

$$0.228948$$

```
R(1000)
```

$$0.771052$$

(b) Comme $P_{X>1000}(X > 1000+1000) = R(1000)$, on a $P_{X>1000}(X > 2000) \simeq 0,771051585804$

(c) On cherche à calculer
$P_{X>2000}(X \leqslant 3000) = 1 - P_{X>2000}(X > 3000) = 1 - P_{X>2000}(X > 2000+1000) = 1 - R(1000) = P(X \leqslant 1000) \simeq 0,228948414196$

EXERCICE 4 *Spécialité*

```
restart(NULL):;
```

1. Sachant que $(1;-1)$ est une solution évidente, on obtient le résultat en utilisant le théorème de Gauss.
2. On se place en mode complexe :

```
complex_variables:=1:; complex_mode:=1:;
```

$$\mathrm{Done}, \mathrm{Done}$$

```
za:=1-i:; zb:=7+7*i/2:; z1:=-2+3*i:;
```

$$\mathrm{Done}, \mathrm{Done}, \mathrm{Done}$$

L'angle de la similitude est $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right)$ et le rapport vaut $\frac{AM}{AB}$. Il s'agit donc de calculer le module et l'argument de $Z = \frac{z_1 - z_A}{z_B - z_A}$

```
Z:=(z1-za)/(zb-za)
```

$$\frac{2*i}{3}$$

```
arg(Z)
```

$$\frac{\pi}{2}$$

```
abs(Z)
```

$$\frac{2}{3}$$

3. Soit f l'application complexe associée à s. Elle est de la forme az+b : il s'agit donc d'une similitude directe.

```
f(z):=Z*z+1/3-5*i/3
```

$$(z) \rightarrow Z^*z+1/3-5^*(i)/3$$

```
f(za)
```

$$1-i$$

Le point A est donc invariant par s. Or s n'est pas l'identité donc A est le centre de la similitude directe. Son rapport vaut $|Z| = \frac{2}{3}$ et son angle $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. (a) A étant le centre de la similitude, on a $\frac{s(AB_n)}{AB_n} = \frac{2}{3}$ et donc

$$AB_{n+1} = \frac{2}{3}AB_n$$

(b) Notons (d_n) la suite définie par $d_n = AB_n$. D'après ce qui précède, (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme

```
abs(zb-za)
```

$$\frac{15}{2}$$

$d_0 = AB = \frac{15}{2}$

On a donc

$$d_n = \frac{15}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

On cherche donc à résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $d_n \leqslant 10^{-2}$

```
no:=resoudre((15/2)*(2/3)^n<=10^(-2),n)
```

$$[n \geq (\frac{\ln\left(\frac{1}{750}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)})]$$

```
evalf(no)
```

$$[n \geq 16.327109]$$

Donc l'entier cherché est 17.

(c) Les points A, B_1 et B_n sont alignés si, et seulement si, $\left(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_n}\right) \equiv 0[\pi]$ c'est-à-dire $\arg\left(\frac{z_n - z_A}{z_1 - z_A}\right) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Or $z_{n+1} - z_A = \frac{2}{3}iz_n - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}i = \frac{2}{3}i(z_n - z_A)$. On en déduit que $z_n - z_A = \left(\frac{2}{3}i\right)^{n-1}(z_1 - z_A)$ et donc que $\arg(z_n - z_A) = (n-1)\frac{\pi}{2} + \arg(z_1 - z_A) + 2k'\pi\ k' \in \mathbb{Z}$.

On obtient donc $(n-1)\frac{\pi}{2} + 2k'\pi = k\pi$ c'est-à-dire $n = 2(k' - 2k) + 1$ ou encore n est impair.

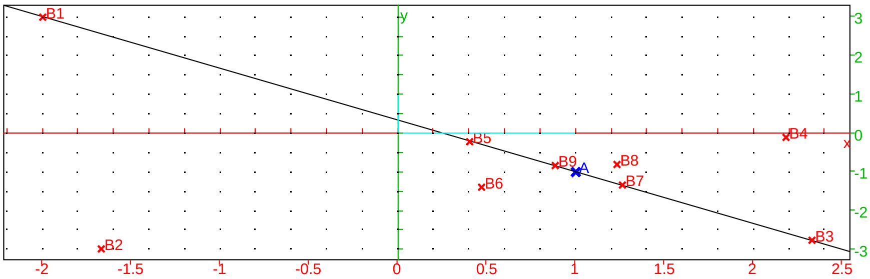
Vérifions à l'aide de XCAS :

```
s:=similitude(za,2/3,pi/2):;
```

Pour obtenir l'affixe de l'image de z_B par la composée d'ordre 10 de s, on entre

```
(s@@10)(zb):;
```

```
couleur(legende(za,"A"),bleu+epaisseur_point_3),
droite(point(za),s(zb)), // la droite (AB1),
seq(couleur(legende((s@@k)(zb),"B"+k),red+epaisseur_point_2),k=1..9)
```



On remarque que les points de rang impair semblent appartenir à la droite (AB_1).