Mathématiques

T$^{\text{ale}}$S3 / 2018-2019

Mis à jour le 1er mars 2019 à 00:50

Une année de mathématiques en T$^{\text{ale}}$S

Guillaume CONNAN

Notre Dame LYCÉES Rezé

THÈME Nº 9

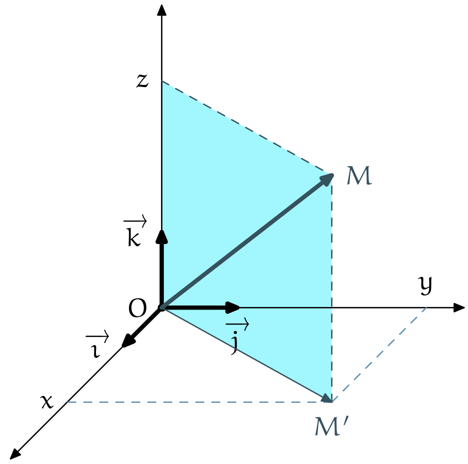
Espace au Bac

1 Produit scalaire

Définition 9 - 1

Produit scalaire dans l'Espace
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans un repère orthonormé de l'Espace.
On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ que l'on note $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ le réel

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$



Soit $\overrightarrow{OM}$ un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$. Nous pouvons calculer OM^2, c'est à dire le carré de la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ en fonction de x, y et z.
D'après le théorème de Pythagore : $OM^2 = OM'^2 + z^2$ et d'autre part, $OM'^2 = x^2 + y^2$. Finalement on obtient que $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$.
Cette formule permet surtout de prouver, avec un minimum de sens de l'observation, que

Propriété 9 - 1

Norme et produit scalaire

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$$

Vous aurez remarqué qu'il n'est pas fait mention de repère dans cette propriété et qu'elle est donc indépendante du repère choisi.
Intéressons-nous maintenant à $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2$

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 &= (x + x')^2 + (y + y')^2 + (z + z')^2 \\
&= x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2(xx' + yy' + zz') \\
&= \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})
\end{aligned}$$

Je vous laisse le soin d'obtenir une formule similaire en remplaçant $\overrightarrow{v}$ par son opposé.

Propriété 9 - 2

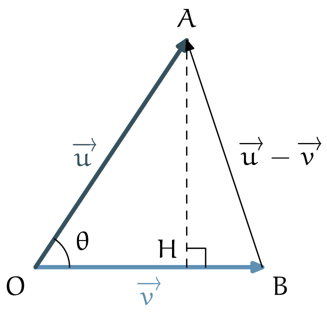
Expression du produit scalaire en fonction de la norme

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2\right)
\end{aligned}$$

Propriété 9 - 3

Propriétés de bilinéarité et de symétrie

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
- $\left(\overrightarrow{u}\right) \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v}\right) = \left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}\right)$ avec $\in \mathbb{R}$
- $\overrightarrow{u} \cdot \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$



Théorème 9 - 1

Produit scalaire et cosinus
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'Espace. On a

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}\right)=\frac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}$$

avec $\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}\right)$ l'unique antécédent de $\dfrac{\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}$ par la fonction cosinus dans $[0,\pi]$.

On retrouve de cette manière la formule bien connue $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta$.

Théorème 9 - 2

Produit scalaire et orthogonalité
Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls et trois points O, A et B tels que $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{OB}$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(1) (OA) et (OB) sont perpendiculaires
(2) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$
(3) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux. On notera $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$

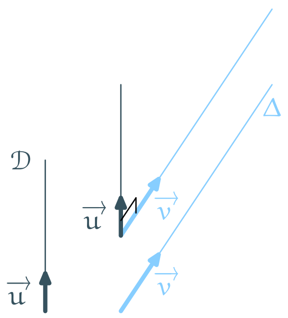
Par souci de cohérence, on dira que le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

2 Applications du produit scalaire

2 1 Droites orthogonales

Définition 9 - 2

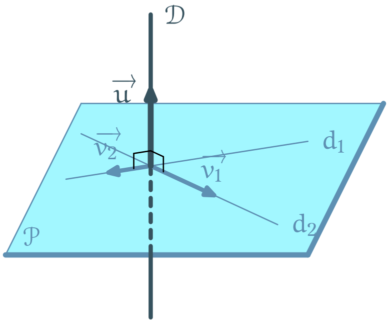
Droites orthogonales
Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et Δ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$.
On dira que les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont **orthogonales** et on notera $\mathcal{D}\perp\Delta$ si et seulement si $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$ c'est à dire si et seulement si $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$



2 2 Droites et plans orthogonaux

Définition 9 - 3

Orthogonalité d'une droite et d'un plan
Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan de vecteurs directeurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.
On dira que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont orthogonaux et on notera $\mathcal{D}\perp\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v_2}$ c'est à dire si et seulement si $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v_1}=0$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v_2}=0$



Notez bien que, comme dans le cas des droites, l'orthogonalité est en fait une propriété vectorielle. On peut néanmoins en donner une formulation équivalente en faisant intervenir des points :

Propriété 9 - 4

$\mathcal{D} \perp \mathcal{P}$ si et seulement si, pour tous points M et N de $\mathcal{P}$ on a $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$

En effet, $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ étant des vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$, il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{MN} = x\,\vec{v_1} + y\,\vec{v_2}$ et donc

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = \vec{u} \cdot \left(x\vec{v_1} + y\vec{v_2}\right) = x\vec{u} \cdot \vec{v_1} + y\vec{u} \cdot \vec{v_2} = 0$$

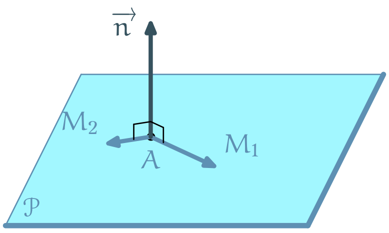
Notez qu'on retrouve la définition 3 en prenant $x = 1$ et $y = 0$, puis $x = 0$ et $y = 1$.

2 3 Vecteur normal à un plan

La direction d'une droite est déterminée par la donnée d'un vecteur. Le problème pour un plan, c'est qu'on a besoin a priori de deux vecteurs, ce qui est doublement plus compliqué et qui gène le mathématicien qui vise toujours la simplicité (si si !...). C'est ici que l'intuition vectorielle vient nous sauver : si un plan a deux directions, il n'a qu'une seule « direction orthogonale » et donc la direction du plan sera entièrement determinée par la donnée d'un vecteur orthogonal à la direction du plan, qu'on appelera **vecteur normal** au plan.
Nous ne nous lancerons pas dans une preuve artificielle à notre niveau et qui sera simple avec les outils que vous découvrirez l'an prochain, mais nous nous contenterons de cette approche intuitive.

Définition 9 - 4

Vecteur normal à un plan
Étant donné un plan $\mathcal{P}$, on appelera **vecteur normal** à $\mathcal{P}$ tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathcal{P}$



Nous admettrons alors les résultats suivants :

Théorème 9 - 3

Détermination d'un plan à l'aide d'un vecteur normal
Soit $\mathcal{P}$ un plan, A un point de $\mathcal{P}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$, alors le point M appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
Réciproquement, si A est un point quelqconque et $\vec{n}$ un vecteur non nul, alors l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est un plan.

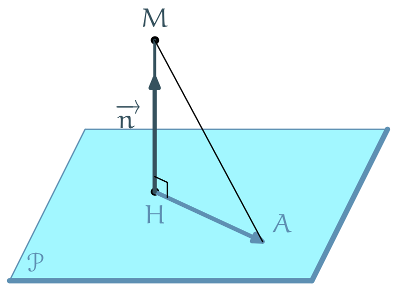
2 4 Distance d'un point à un plan

Mettons-nous d'accord sur une définition :

Définition 9 - 5

Distance d'un point à un plan
Soit M un point, $\mathcal{P}$ un plan. On appelle distance de M à $\mathcal{P}$ la distance MH, avec H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$

Vous pouvez commencer, pour vous échauffer, par montrer à l'aide d'un dessin et d'un petit raisonnement utilisant un théorème connu depuis fort longtemps, que MH est en fait le minimum des distances MN, $N \in \mathcal{P}$.
Il reste à exprimer cette distance MH. On suppose connu le plan $\mathcal{P}$ et donc un point quelconque A de $\mathcal{P}$ et un de ses vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$.
Aidons-nous alors du dessin suivant :



Cela doit maintenant devenir un reflexe : qui dit projection orthogonale, dit produit scalaire, donc la distance MH devrait pouvoir s'exprimer en fonction de $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}$.
Or on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} &= \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) \cdot \overrightarrow{n} \\
&= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n} + \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{n} \\
&= \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{n} \\
&= \pm\, d(M, \mathcal{P}) \|\overrightarrow{n}\|
\end{aligned}$$

Le plus ou le moins étant choisis selon les sens respectifs de $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{n}$. Le problème, c'est qu'on ne les connait pas a priori. Mais ce n'est plus un problème si on cache les signes sous une valeur absolue, puisque c'est la distance - positive - qui nous intéresse.

Ainsi, $\left|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}\right| = d(M, \mathcal{P}) \|\overrightarrow{n}\|$ et donc

Théorème 9 - 4

Calcul de la distance d'un point à un plan
Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par le point A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et soit M un point quelconque. Alors

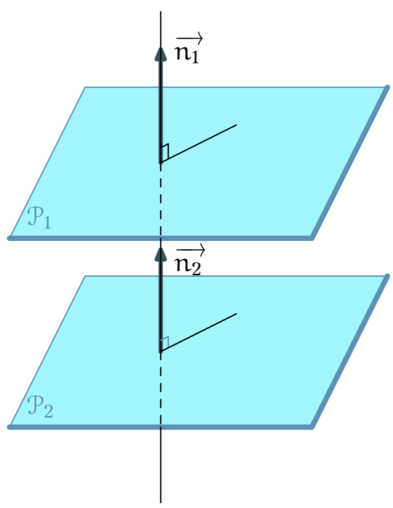
$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

2 5 Plans parallèles

Voici une utilisation bien pratique de la notion de vecteur normal :

Propriété 9 - 5

Plans parallèles
Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

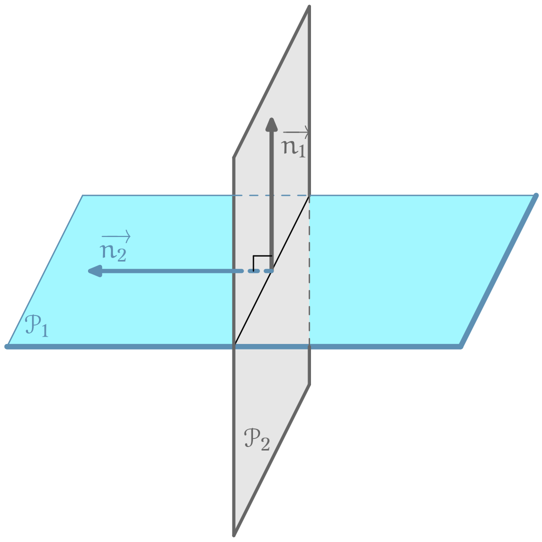


2 6 Plans perpendiculaires

En voici une autre souvent utile en exercice :

Propriété 9 - 6

Plans perpendiculaires
Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.



Remarquez en particulier que $\overrightarrow{n_1}$ et un vecteur directeur de $\mathcal{P}_2$ et $\overrightarrow{n_2}$ un vecteur directeur de $\mathcal{P}_1$.

3 Géométrie analytique

3 1 Représentation paramétrique d'un plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$. Alors un point M de coordonnées (x, y, z) appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement s'il existe deux réels λ et μ tels que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$$

c'est à dire, en appliquant cette relation aux coordonnées

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda a + \mu a' \\ y = y_A + \lambda b + \mu b' \\ z = z_A + \lambda c + \mu c' \end{cases}$$

C'est ce qu'on appelle une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$. Il est également utile de retrouver les éléments caractéristiques du plan (un point et deux vecteurs directeurs) à partir de cette représentation.

3 2 Équation cartésienne d'un plan

On utilise plus couramment une équation cartésienne de plan. En effet, nous avons vu qu'un plan était entièrement déterminé par la donnée d'un point et d'un vecteur normal.

Soit donc $\mathcal{P}$ un plan passant par A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Alors M de coordonnées (x, y, z) appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n}$, c'est à dire

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} &= a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) \\ &= ax + by + cz - (ax_A + by_A + cy_A) \\ &= 0\end{aligned}$$

C'est à dire encore, en posant $d = ax_A + by_A + cz_A$

Propriété 9 - 7

Équation cartésienne d'un plan

$$M(x,y,z) \in \mathcal{P} \iff ax + by + cz = d \text{ avec } \overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ un vecteur normal à } \mathcal{P}$$

3 3 Représentation paramétrique d'une droite

Quant aux droites, nous n'avons guère le choix : un point M appartient à la droite $\mathcal{D}$ passant par A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ si, et seulement s'il existe un réel λ tel que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}$$

c'est à dire si, et seulement si

$$\begin{cases} x = x_A + \lambda a \\ y = y_A + \lambda b \\ z = z_A + \lambda c \end{cases}$$

Notez bien que λ est le paramètre de la représentation (d'où l'appellation), mais aurait pu porter tout autre nom.

3 4 Sphères

Définition 9 - 6

Sphère
Une sphère de centre C et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\|\overrightarrow{CM}\| = r$$

Analytiquement, dans un repère orthonormé, nous écrirons :

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2$$

EXERCICES

Recherche 9 - 1 QCM

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1. La droite d a pour représentation paramétrique $x = 2 - t$; $y = 3t$; $z = -3$, $t \in \mathbb{R}$.
   On considère les points A(2 ; 3 ; −3),
   B(2 ; 0 ; −3) et C(0 ; 6 ; 0). On a :
   a) d = (AB) **b)** d = (BC) **c)** d ≠ (AB) et d ≠ (BC) et d ≠ (CA)
2. Les droites de représentations paramétriques respectives :
   $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 2+t \\ y & = & 1-t \\ z & = & 1+t, t \in R, \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{lll} x & = & -t' \\ y & = & -2-1,5t' \\ z & = & 3+t',\ t' \in R \end{array}\right.$ admettent comme point commun :
   a) I(3 ; 0 ; 2) **b)** J(2 ; 1 ; 1) **c)** K(0 ; 2 ; −3)
3. Les droites de représentations paramétriques respectives :
   $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1 \\ y & = & 1+2t \\ z & = & 1+t,\ t \in R, \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 3-2t' \\ y & = & 7-4t' \\ z & = & 2-t',\ t' \in R \end{array}\right.$
   sont :
   a) parallèles **b)** sécantes **c)** non coplanaires
4. La droite de représentation paramétrique $x = -4t$; $y = 1 + 3t$; $z = 2 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$ et le plan d'équation $x - 2y + 5z - 1 = 0$ sont :
   a) orthogonaux **b)** parallèles **c)** ni orthogonaux ni parallèles
5. L'ensemble des points tels que
   $$x - y + 2z - 1 = 0$$
   et
   $$-2x + 4y - 4z + 1 = 0$$
   est :
   a) l'ensemble vide **b)** une droite **c)** un plan

Recherche 9 - 2 Bac

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère la droite (D) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 2+t \\ y & = & 1-3t \\ z & = & 2t \end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$, et le plan (P) d'équation cartésienne $x + y + z - 3 = 0$.

On peut affirmer que :

Réponse A : la droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.
Réponse B : la droite (D) est incluse dans le plan (P).
Réponse C : la droite (D) et le plan (P) se coupent au point de coordonnées (4 ; −5 ; 4).
Réponse D : la droite (D) et le plan (P) sont orthogonaux.

Recherche 9 - 3 Bac

Le but de cet exercice est d'examiner, dans différents cas, si les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes, c'est-à-dire d'étudier l'existence d'un point d'intersection de ses quatre hauteurs.
On rappelle que dans un tétraèdre MNPQ, *la hauteur issue de* M *est la droite passant par* M *orthogonale au plan* (NPQ).

Partie A Étude de cas particuliers

On considère un cube ABCDEFGH.
On admet que les droites (AG), (BH), (CE) et (DF), appelées « grandes diagonales » du cube, sont concourantes.

1. On considère le tétraèdre ABCE.
   i. Préciser la hauteur issue de E et la hauteur issue de C dans ce tétraèdre.
   ii. Les quatre hauteurs du tétraèdre ABCE sont-elles concourantes ?
2. On considère le tétraèdre ACHF et on travaille dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
   i. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ACH) est : $x - y + z = 0$.
   ii. En déduire que (FD) est la hauteur issue de F du tétraèdre ACHF.
   iii. Par analogie avec le résultat précédent, préciser les hauteurs du tétraèdre ACHF issues respectivement des sommets A, C et H.
   Les quatre hauteurs du tétraèdre ACHF sont-elles concourantes ?

Dans la suite de cet exercice, un tétraèdre dont les quatre hauteurs sont concourantes sera appelé un tétraèdre orthocentrique.

Partie B Une propriété des tétraèdres orthocentriques

Dans cette partie, on considère un tétraèdre MNPQ dont les hauteurs issues des sommets M et N sont sécantes en un point K. Les droites (MK) et (NK) sont donc orthogonales aux plans (NPQ) et (MPQ) respectivement.

1. i. Justifier que la droite (PQ) est orthogonale à la droite (MK) ; on admet de même que les droites (PQ) et (NK) sont orthogonales.
   ii. Que peut-on déduire de la question précédente relativement à la droite (PQ) et au plan (MNK) ? Justifier la réponse.
2. Montrer que les arêtes [MN] et [PQ] sont orthogonales.
   Ainsi, on obtient la propriété suivante :
   Si un tétraèdre est orthocentrique, alors ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.
   (On dit que deux arêtes d'un tétraèdre sont « opposées » lorsqu'elles n'ont pas de sommet commun.)

Partie C Application

Dans un repère orthonormé, on considère les points :

$$R(-3 ; 5 ; 2), S(1 ; 4 ; -2), T(4 ; -1 ; 5) \quad \text{et } U(4 ; 7 ; 3).$$

Le tétraèdre RSTU est-il orthocentrique ? Justifier.

Recherche 9 - 4 Bac

On se place dans un repère orthonormé d'origine O et d'axes (Ox), (Oy) et (Oz).
Dans ce repère, on donne les points $A(-3 ; 0 ; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $C\left(0 ; 3\sqrt{3} ; 0\right)$ et $D\left(0 ; \sqrt{3} ; 2\sqrt{6}\right)$.
On note H le milieu du segment [CD] et I le milieu du segment [BC].

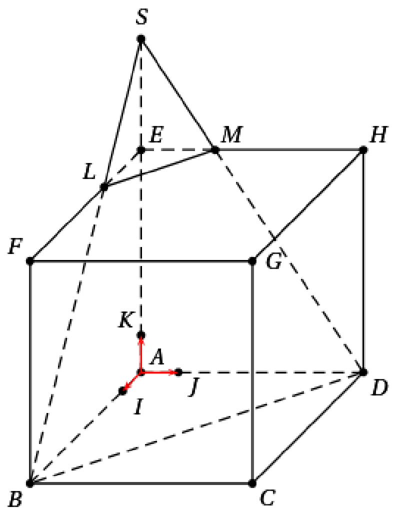
1. Calculer les longueurs AB et AD.

On admet pour la suite que toutes les arêtes du solide ABCD ont la même longueur, c'est-à-dire que le tétraèdre ABCD est un tétraèdre régulier.
On appelle $\mathcal{P}$ le plan de vecteur normal $\overrightarrow{OH}$ et passant par le point I.

2. Étude de la section du tétraèdre ABCD par le plan $\mathcal{P}$
   i. Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $2y\sqrt{3} + z\sqrt{6} - 9 = 0$.
   ii. Démontrer que le milieu J de [BD] est le point d'intersection de la droite (BD) et du plan $\mathcal{P}$.
   iii. Donner une représentation paramétrique de la droite (AD), puis démontrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AD) sont sécants en un point K dont on déterminera les coordonnées.
   iv. Démontrer que les droites (IJ) et (JK) sont perpendiculaires.
   v. Déterminer précisément la nature de la section du tétraèdre ABCD par le plan $\mathcal{P}$.
3. Peut-on placer un point M sur l'arête [BD] tel que le triangle OIM soit rectangle en M ?

Recherche 9 - 5 **Bac**

Un artiste souhaite réaliser une sculpture composée d'un tétraèdre posé sur un cube de 6 mètres d'arête.
Ces deux solides sont représentés par le cube ABCDEFGH et par le tétraèdre SELM ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$ tel que : $I \in [AB]$, $J \in [AD]$, $K \in [AE]$ et $AI = AJ = AK = 1$, l'unité graphique représentant 1 mètre.
Les points L, M et S sont définis de la façon suivante :

- ▶ L est le point tel que $\overrightarrow{FL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{FE}$;
- ▶ M est le point d'intersection du plan (BDL) et de la droite (EH) ;
- ▶ S est le point d'intersection des droites (BL) et (AK).

1. Démontrer, sans calcul de coordonnées, que les droites (LM) et (BD) sont parallèles.
2. Démontrer que les coordonnées du point L sont $(2\ ;\ 0\ ;\ 6)$.
3. i. Donner une représentation paramétrique de la droite (BL).
   ii. Vérifier que les coordonnées du point S sont $(0\ ;\ 0\ ;\ 9)$.
4. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\ ;\ 3\ ;\ 2)$.
   i. Vérifier que $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (BDL).
   ii. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDL) est :
   $$3x + 3y + 2z - 18 = 0.$$
   iii. On admet que la droite (EH) a pour représentation paramétrique :
   $$\begin{cases} x = 0 \\ y = s \quad (s \in \mathbb{R}) \\ z = 6 \end{cases}$$
   Calculer les coordonnées du point M.
5. Calculer le volume du tétraèdre SELM. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule suivante :
   $$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Aire de la base} \cdot \text{Hauteur}.$$
6. L'artiste souhaite que la mesure de l'angle $\widehat{SLE}$ soit comprise entre 55° et 60°.
   Cette contrainte d'angle est-elle respectée ?

Recherche 9 - 6 **Bac**

On considère un cube ABCDEFGH.
Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

- ▶ I est le milieu du segment [AD] ;

- J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$;
- K est le milieu du segment [FG].

Partie A

1. Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.
2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).

Partie B

On se place désormais dans le repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. **i.** Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.
   ii. Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\overrightarrow{n}(4\ ;\ a\ ;\ b)$ soit orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.
   iii. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $4x - 6y - 4z + 3 = 0$.
2. **i.** Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).
   ii. Calculer les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG).
   iii. Placer le point N sur la figure et construire en couleur la section du cube par le plan (IJK).

Partie C

On note R le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK). Le point R est donc l'unique point du plan (IJK) tel que la droite (FR) est orthogonale au plan (IJK).

On définit l'intérieur du cube comme l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \\ 0 < z < 1 \end{cases}$

Le point R est-il à l'intérieur du cube ?

Recherche 9 - 7 ENI-GEIPI 2017

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère :

- les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives :
  $A\,(0\ ;\ 4\ ;\ -1)$, $B\,(-2\ ;\ 4\ ;\ -5)$, $C\,(1\ ;\ 1\ ;\ -5)$, $D\,(1\ ;\ 0\ ;\ -4)$, $E\,(-1\ ;\ 2\ ;\ -3)$;
- la droite $\mathcal{D}$ définie par le système d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = -3 + k \\ y = k \\ z = -5 + k \end{cases},\ \text{avec } k \in \mathbb{R};$$
- le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation cartésienne : $x + 2z + 7 = 0$.

1. **i.** Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$ au plan $\mathcal{P}_1$.
   ii. Soit I le milieu du segment [AB]. Montrer que I appartient au plan $\mathcal{P}_1$.
   iii. Montrer que la droite (AB) est orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$.
2. Soit $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation cartésienne : $x - y + d = 0$, où d désigne un réel.
   i. Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$ au plan $\mathcal{P}_2$.
   ii. Soit J le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\ ;\ -5\right)$.
   Déterminer d pour que J appartienne au plan $\mathcal{P}_2$. Justifier la réponse.
3. **i.** Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$.
   ii. Calculer les coordonnées du milieu K du segment [CD].
   iii. Soit $\mathcal{P}_3$ le plan passant par K et orthogonal à la droite (CD).
   Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_3$. Justifier la réponse.
4. Le but de cette question est de prouver que les plans $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ ont comme seul point commun, le point E.
   i. Justifier que les plans $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont sécants et que leur droite d'intersection est la droite $\mathcal{D}$.
   ii. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ coupe le plan $\mathcal{P}_1$ au point E.

5. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{ED}$.
6. Donner les distances EA, EB, EC et ED. Détailler le calcul pour ED.
7. En déduire que A, B, C et D appartiennent à une sphère $\mathcal{S}$ dont on précisera le centre et le rayon R. Justifier la réponse.
8. Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.

Recherche 9 - 8 ENI-GEIPI 2018

Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes

À chaque question, une affirmation vous est proposée et vous devez indiquer si elle est vraie ou fausse dans le cadre prévu. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse incorrecte sera pénalisée, une absence de réponse ne sera pas pénalisée.

Dans les parties A, B, C et D, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Partie A

On considère deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ donnés par leur équation cartésienne :

$$\mathcal{P}_1 : \quad 2x + 3y + 4z - 1 = 0 \qquad \mathcal{P}_2 : \quad x + 2y + z = 0.$$

1. Le vecteur $\overrightarrow{n}\left(1 ; \frac{3}{2} ; 2\right)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_\infty$.
2. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.
3. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants et leur intersection est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-5 ; 2 ; 1)$.

Partie B

On note R, S, T et U les points de coordonnées respectives :

$$R(2 ; 4 ; 1) \quad S(0 ; 4 ; -3) \quad T(3 ; 1 ; -3) \quad U(1 ; 0 ; -2)$$

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne : $2x + 2y - z - 11 = 0$.

1. Les points R, S et T appartiennent à un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}2 ; 2 ; -1)$.
2. La droite (TU) est orthogonale à la droite (RS) et admet la représentation paramétrique suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1 + 2t \\ y & = & -1 + t \\ z & = & 1 - t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$

3. Le point V(3 ; 2 ; -1) est le projeté orthogonal du point U sur le plan P.

Partie C

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites données par un système d'équations paramétriques :

$$\mathcal{D}_1 : \left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -5 + t \end{array}\right., t \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{D}_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 8 + k \\ y & = & 4 + k \\ z & = & -3 \end{array}\right., k \in \mathbb{R}.$$

On note $\mathcal{Q}$ le plan d'équation : $2x - 3y + 2z = 0$.

1. Le vecteur $\overrightarrow{u}(1 ; 1 ; 1)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_1$.
2. La droite $\mathcal{D}_2$ passe par le point de coordonnées (5 ; 1 ; -3).
3. Soient M un point de $\mathcal{D}_1$ et N un point de $\mathcal{D}_2$ de coordonnées respectives : $M(1 + t ; t ; -5 + t)$ et $N(8 + k ; 4 + k ; -3)$.
   La droite (MN) est parallèle au plan $\mathcal{Q}$ si et seulement si $t + k = 6$.

Partie D

On considère un cube ABCDEFGH. Les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
On note I et J les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CG].

1. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}$.
2. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IC}$.
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = AB \cdot IC \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.