IRIS 2 – corrigé du devoir à la maison n° 1

PARTIE A – étude du système pour une entrée nulle

1. *Solution générale de l'équation différentielle* (E_1) *:* $y''(t) + 4y(t) = 0$

   L'équation caractéristique de l'équation (E_1) est $r^2 + 4 = 0$. Cette équation a deux solutions complexes conjuguées $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$.
   La solution générale de (E_1) est la fonction $t \longmapsto \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)$ avec λ et μ deux constantes.

2. *Solution* f *de* (E_1) *telle que* $f(0) = 0$ *et* $f'(0) = 2$

   f est une solution de (E_1) donc, pour tout réel t, $f(t) = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $f'(t) = -2\lambda\sin(2t) + 2\mu\cos(2t)$.
   On obtient donc $f(0) = \lambda$ et $f'(0) = 2\mu$.
   $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$ si et seulement si $\lambda = 0$ et $2\mu = 2$ d'où $\lambda = 0$ et $\mu = 1$, donc, pour tout réel t, $f(t) = \sin(2t)$.

PARTIE B – étude du système soumis à un contrôle

1. a. *Représentation graphique de* $t \longmapsto e(t) = 2\mathscr{U}(t) - 2\mathscr{U}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

   Pour tout réel t, $e(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \text{ ou } t > \frac{\pi}{4} \\ 2 \text{ si } 0 \leqslant t < \frac{\pi}{4} \end{cases}$

   b. *Transformée de* LAPLACE E *de* e

   Pour tout $p > 0$, $E(p) = \dfrac{2\left(1 - e^{-\frac{\pi}{4}p}\right)}{p}$.

2. $\boxed{4\int_0^t s(u)\,du + s'(t) = e(t) \text{ et } s\left(0^+\right) = 0}$

   a. *Transformée de* LAPLACE S *de* s

   D'après le formulaire : $\mathscr{L}\left(\int_0^t s(u)\,du\right) = \dfrac{S(p)}{p}$ et $\mathscr{L}\left(s'(t)\right) = pS(p) - s\left(0^+\right) = pS(p)$, pour tout $p > 0$.

   En utilisant la linéarité on peut écrire : $4 \times \dfrac{S(p)}{p} + pS(p) = \dfrac{2\left(1 - e^{-\frac{\pi}{4}p}\right)}{p}$.

   En calculant $S(p)$ dans cette égalité, on obtient, pour tout $p > 0$, $S(p) = \dfrac{2\left(1 - e^{-\frac{\pi}{4}p}\right)}{p^2 + 4}$.

   b. *Calcul de* $s(t)$

   Pour tout $p > 0$, $S(p) = \dfrac{2}{p^2 + 4} - \dfrac{2}{p^2 + 4} \times e^{-\frac{\pi}{4}p}$.

   $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{2}{p^2 + 4}\right) = \sin(2t)\mathscr{U}(t)$ et $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{2}{p^2 + 4}e^{-\frac{\pi}{4}p}\right) = \sin\left[2\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)\right]\mathscr{U}\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$ donc, pour tout réel t, $s(t) = \sin(2t)\mathscr{U}(t) - \sin\left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right)\mathscr{U}\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. a. *Expressions de* $s(t)$ *pour* $t < 0$, $0 \leqslant t < \frac{\pi}{4}$ *et* $t \geqslant \frac{\pi}{4}$

   - Pour $t < 0$, $\mathscr{U}(t) = \mathscr{U}\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ donc $s(t) = 0$.
   - Pour $0 \leqslant t < \frac{\pi}{4}$, $\mathscr{U}(t) = 1$ et $\mathscr{U}\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ donc $s(t) = \sin(2t)$.
   - Pour $t \geqslant \frac{\pi}{4}$, $\mathscr{U}(t) = \mathscr{U}\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ donc $s(t) = \sin(2t) - \sin\left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b. *Comportement de* s *en* $\frac{\pi}{4}$

- $s\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\sin(2t)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$,
- $s\left(\frac{\pi}{4}+0\right)=\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{4}}\left[\sin(2t)-\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(0)=1$.

On a donc $s\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=s\left(\frac{\pi}{4}+0\right)=1$.

Cela signifie que la fonction s est continue en $\frac{\pi}{4}$. On peut vérifier qu'elle est également continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$.

c. *Autre expression de* $s(t)$ *pour* $t\geqslant\frac{\pi}{4}$

Pour tout $t\geqslant\frac{\pi}{4}$, $s(t)=\sin(2t)-\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)$.

On utilise la formule $\sin(p)-\sin(q)=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$ avec $p=2t$ et $q=2t-\frac{\pi}{2}$.

On obtient, pour tout $t\geqslant\frac{\pi}{4}$, $s(t)=\sqrt{2}\cos\left[2\left(t-\frac{\pi}{8}\right)\right]$.

d. *Résolution de* $s(t)=0$ *dans* $[0\ ;\ 2\pi]$

- Pour $0\leqslant t<\frac{\pi}{4}$ l'équation s'écrit $\sin(2t)=0$ soit $t=\frac{k\pi}{2}$ (avec k entier) d'où $t=0$.
- Pour $\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant 2\pi$ l'équation s'écrit $\sqrt{2}\cos\left[2\left(t-\frac{\pi}{8}\right)\right]=0$ soit $2\left(t-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ (avec k entier) d'où $t=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$. On obtient quatre solutions : $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8}$, $\frac{11\pi}{8}$ et $\frac{15\pi}{8}$.

En conclusion, l'équation $s(t)=0$ a dans $[0\ ;\ 2\pi]$ cinq solutions : 0, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8}$, $\frac{11\pi}{8}$ et $\frac{15\pi}{8}$.