Objectifs : sujet type bac pour les nombres complexes et une drole de fonction !

EXERCICE - 1

Le plan complexe est rapporté au repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Montrer que l'équation $z^3 - (2+2i)z^2 + (2+4i)z - 4i = 0$ admet une solution imaginaire pure.
   Résoudre cette équation.
   Donner les solutions sous forme algébrique et sous forme exponentielle (justifier les réponses).

2. Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 + i$ et $z_B = 2i$.
   A tout complexe z différent de A on associe le complexe

$$z' = \frac{z - 2i}{z - 1 - i}.$$

   a) Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.
   Montrer que $B \in (E)$.
   Déterminer et construire l'ensemble (E).

   b) Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.
   Déterminer et construire (F).

3. Soit R la rotation de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

   a) Calculer l'affixe du point B', image de B par R et l'affixe du point I', image par R du point $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

   b) Quelles sont les images de (E) et (F) par R ?

EXERCICE - 2

Une fonction de Gompertz

On considère la fonction f définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = e^{-2e^{-3x}}$$

1. Calculer $f(0)$.

2. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. Calculer la dérivée f' de f. En déduire le tableau de variations de f.

4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse $x_0 = \frac{1}{3}\ln 2$.

5. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.