2 B.C.P.S.T – VÉTO 2

Projecteurs – symétries

Mercredi 16 octobre 2013

1. On pose $E = \mathbb{R}^4$ et on considère les deux espaces :

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{(x,y,z,t) \in E\,,\ x+y+z+t=0\} \\ G & = & \mathrm{Vect}(e) \quad \text{avec } e=(1,1,1,1) \end{array}$$

   (a) Etablir que $E = F \oplus G$.

   (b) Expliciter la projection p sur F parallèlement à G.

   (c) Expliciter la symétrie s par rapport à F parallèlement à G.

2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathscr{M}(\beta, p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que p est un projecteur.

   (b) Déterminer sur quel sous-espace et de quelle direction. Donner une base de chacun de ces espaces.

   (c) Déterminer une base de E dans laquelle la matrice de p est diagonale.

3. Soient E et β définis à l'exercice précédent et $s \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathscr{M}(\beta, s) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que s est une symétrie.

   (b) Déterminer par rapport à quel sous-espace et parallèlement à quel sous-espace. Donner une base de chacun de ces espaces.

   (c) Déterminer une base de E dans laquelle la matrice de s est diagonale.

4. On considère toujours E et β et $f \in \mathscr{L}(E)$ défini par :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(e_1) & = & 3e_1 \\ f(e_2) & = & 3e_2 \\ f(e_3) & = & -3e_1 - 3e_2 - 3e_3 \end{array} \right.$$

   (a) Donner la matrice de f dans la base β et écrire les formules analytiques de f.

   (b) Soit $F = \{x \in E\ ,\ f(x) = -3x\}$. Montrer que F est une droite vectorielle dont on déterminera une base (ε_1).

   (c) Soit $G = \{x \in E\ ,\ f(x) = 3x\}$. Montrer que G est un plan vectoriel dont on déterminera une base $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$.
   Donner une équation cartésienne de G.

   (d) Montrer que $E = F \oplus G$ et construire une base β' de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

   (e) Montrer que $f \circ f$ est une homothétie dont on donnera le rapport.

   (f) On note $h_{\frac{1}{3}}$ l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{3}$. Soit $g = h_{\frac{1}{3}} \circ f$. Montrer que g est une symétrie, préciser l'ensemble des invariants et la direction et donner une base de E dans laquelle la matrice de g est diagonale.

5. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{E} = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit $p \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ dont la matrice relativement à $\mathscr{B}$ est $\mathscr{M} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 6 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que p est un projecteur.

   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ et donner une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(p)$ et une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Im}(p)$.

   (c) Montrer que $\mathscr{B}' = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est une base de $\mathbb{E}$ et écrire la matrice de p relativement à $\mathscr{B}'$.

6. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et s un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

   (a) Démontrer que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ sont deux sous-espaces supplémentaires dans E.

(b) Justifier qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de s est diagonale, et préciser les coefficients de la diagonale de cette matrice.

(c) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

i. Vérifier que $A^2 = I_3$.

ii. En déduire qu'il existe $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

iii. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et de $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$.

iv. Déterminer une matrice P qui répond à la 6(c)ii et calculer $D = P^{-1}AP$.

7. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $(i, j, k) = \mathscr{B}$ et les deux s.e.v. de E, $E_1 = \mathrm{Vect} < i, j >$ et $E_2 = \mathrm{Vect} < k >$.

(a) Ecrire la matrice de la symétrie s par rapport à E_1 de direction E_2 dans la base $\mathscr{B}$.

(b) Ecrire la matrice de la projection p par rapport à E_1 de direction E_2 dans la base $\mathscr{B}$.

8. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique $(i, j) = \mathscr{B}$ et les deux s.e.v. de E, $E_1 = \mathrm{Vect} < i + j >$ et $E_2 = \mathrm{Vect} < i - j >$.

(a) Écrire la matrice de la symétrie s par rapport à E_1 de direction E_2 dans la base $\mathscr{B}$.

(b) Écrire la matrice de la projection p par rapport à E_1 de direction E_2 dans la base $\mathscr{B}$.

9. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P(X) & \longmapsto & Q(X) = P(1 - X) \end{array} \right.$

(a) Montrer que φ est une symétrie.

(b) Déterminer le s.e.v. des invariants et le s.e.v. des polynômes changés en leur opposé.

(c) On suppose $E = \mathbb{R}_2[X]$; écrire la matrice de φ dans la base canonique.
Écrire la matrice de φ dans la base $(1, X - \frac{1}{2}, (X - \frac{1}{2})^2)$.

10. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4, muni d' une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. $\mathscr{M}(f, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer le rang de f, son noyau, son image, le s.e.v. des invariants (équation et dimension) et montrer que f est un projecteur.

11. Soient $E = \mathbb{C}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et soient a et b deux complexes vérifiant $a^2 + b^2 = 1$.
Soit enfin f l'application linéaire définie par :
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ e_1 & \longmapsto & e_1 \\ e_2 & \longmapsto & ae_2 + be_3 \\ e_3 & \longmapsto & be_2 - ae_3 \end{array} \right.$$
Montrer que f est une symétrie et déterminer Ker $(f - Id)$ et Im $(f - Id)$.

12. Dans $\mathbb{R}^3$, existe-t-il un projecteur sur $G : x + y = 0$ parallèlement à $F : y = z = 0$? si oui, déterminer sa matrice dans la base canonique.