2 B.C.P.S.T – VÉTO 2

Lundi 7 septembre 2015

Révisions d'analyse

1. On considère l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{i\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z \longmapsto \dfrac{z+i}{z-i} \end{cases}$
   (a) Montrer que φ est bijective et déterminer φ^{-1}.
   (b) Déterminer l'image réciproque de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par φ *(on pourra par exemple montrer que si $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors son antécédent est un imaginaire pur, puis étudier le module de $\varphi^{-1}(y)$ en fonction de y).*
2. (a) Déterminer les racines carrées de $A = -5 + 12\,i$ *(on donnera les solutions sous forme algébrique).*
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2 + i\,z + 1 - 3\,i = 0$.
   (c) On considère le polynôme à cœfficients complexes $P(z) = z^4 + 8\,z^3 + (2 - 3\,i)\,z^2 + (13 - 25\,i)\,z - 8\,(3 + i)$
      i. Montrer que P a une racine imaginaire pure z_1 et la déterminer ; en déduire une factorisation de P sous la forme $P(z) = (z - z_1)\,Q(z)$ où Q est un polynôme à cœfficients complexes que l'on calculera.
      ii. Montrer que Q a une racine réelle z_2 et la calculer ; en déduire une nouvelle factorisation de P.
      iii. Donner les autres racines de P et écrire P sous la forme d'un produit de quatre polynômes de degré un.
3. Déterminer le module et un argument de $Z = (1 + i\sqrt{3})^n - (1 - i\sqrt{3})^n$.
4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 16\,u_{n+1} = 1 + 4\,u_n + \sqrt{1 + 24\,u_n}$. On pose $v_n = \sqrt{1 + 24\,u_n}$.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, puis v_n en fonction de n.
   (b) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.
5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation $(E_n) : x^{n+2} + 2x - 1 = 0$
   (b) Montrer qu'il existe un unique réel $u_n \in]0, 1[$ solution de (E_n).
   (c) Prouver que la suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$.
   (d) Établir que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.
   (e) On pose $v_n = \frac{1}{2} - u_n$. Démontrer que $v_n = \frac{(1-2v_n)^{n+2}}{2^{n+3}}$ et établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} nv_n = 0$. En déduire un équivalent de v_n.
6. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $|2 + x| + 2 + 2\,x = x^2$.
   Résoudre ensuite (toujours dans $\mathbb{R}$) les équations suivantes :
   (b) $|2 + \ln x| + 2 + 2\,\ln x = (\ln x)^2$.
   (c) $|2\,e^{-x} + 1| + 2\,e^{-x} + 2 = e^x$
7. Soient h et ℓ les fonctions définies par $h(x) = \ln(\ln x)$ et $\ell(x) = 3 - x$.
   (a) Déterminer les domaines de définition de h et de ℓ ainsi que leur sens de variation.
   (b) Montrer que l'équation $h(x) = \ell(x)$ admet une unique solution réelle que l'on notera α ; encadrer α entre deux puissances entières de e ($e^n < \alpha < e^{n+1}$ avec $n \in \mathbb{Z}$).
8. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\text{Arctan}\,(1 + x) - \text{Arctan}\,x = \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x^2 + x + 1}\right)$.
   (b) En déduire la convergence de la suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :
   $s_n = \text{Arctan}\,(1/3) + \text{Arctan}\,(1/7) + \cdots + \text{Arctan}\,(1/n^2 + n + 1)$.
9. Soit l'équation différentielle : $(1 - x^2)\,y' - 2\,xy = x^2$ (*)
   (a) Résoudre l'équation sans second membre associée sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty\,, -1[$, $I_2 =]-1\,, 1[$, $I_3 =]1\,, +\infty\,[$.
   (b) Résoudre l'équation complète avec la méthode de variation de la constante.
   (c) Montrer qu'il existe des solutions sur $I_1 \cup I_2$, sur $I_2 \cup I_3$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

10. Équations d'ordre deux à paramètre (a) $m\,y'' - (m^2+1)\,y' + m\,y = x\,e^x$ (b) $m\,y'' + (m+1)\,y' + y = e^{-x}$

11. Exemple d'une équation différentielle non linéaire : $y - \dfrac{x}{2}\,y' = \sqrt{y}$

    On veut déterminer sur $]0;+\infty[$, une fonction solution y, à valeurs strictement positives, telle que $y(1) = \frac{9}{4}$.

    (a) Quelle doit-être la valeur de $y'(1)$?

    (b) On pose $z = \sqrt{y}$; déterminer une équation différentielle linéaire d'inconnue z, trouver z, puis y.

12. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-3) + (x+1)\,e^{-x}$, et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

    (a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. Noter dans un même tableau le signe de $f''(x)$ puis le sens de variation de f' et le signe de $f'(x)$ et enfin le sens de variation de f.

    (b) Étudier les branches infinies de $\mathcal{C}$ et représenter sommairement $\mathcal{C}$.

    (c) α étant un réel positif, calculer l'aire de la partie du plan comprise entre les droites d'équation $x = -1$ et $x = \alpha$ d'une part et entre la droite d'équation $y = x - 3$ et la courbe $\mathcal{C}$ d'autre part.
    Montrer que cette aire admet une limite finie lorsque α tend vers $+\infty$ et la calculer.

13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $g(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

    (a) Établir qu'il existe deux valeurs de a telles que la tangente T_a à la courbe représentative de g passe par l'origine du repère et les calculer.

    (b) Vérifier en traçant le graphe de g et les deux tangentes déterminées.

14. Étudier au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{Arctan} x} - \dfrac{1}{x}$

15. Pour tout réel $a > 0$, on considère l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_a^{a+1} \frac{\ln(1+e^{-x})}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

    (a) Montrer que $0 \leqslant I(a) \leqslant \displaystyle\int_a^{a+1} \frac{\ln 2}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

    (b) En déduire $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} I(a) = 0$

16. Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}\,t$.

17. Résolution de l'équation différentielle (E) : $(1+x)\,y'' - 2\,y' + (1-x)\,y = 0$

    (a) Montrer qu'il existe$\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $x \mapsto \exp(\alpha\,x)$ soit solution de (E) sur $\mathbb{R}$
    (on notera f_0 cette solution) ; vérifier que f_0 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

    (b) Soit y une solution quelconque, on pose $z = y/f_0$; montrer que z' est solution d'une équation différentielle du premier ordre et la résoudre.

    (c) Déterminer toutes les fonctions solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

18. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t^3 + t$.

    (a) Déterminer les variations de f et montrer que f admet une fonction réciproque notée g.
    Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(g(x)\big)^3 + g(x) = x$

    (b) Montrer que la fonction g est strictement croissante et impaire.

    (c) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Exprimer $g^{'}$ en fonction de g ; en déduire que g est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

    (d) Étudier la convexité de g.

    (e) Construire les courbes représentatives de f et g dans un même repère.

    (f) Démontrer que g admet en 0 un développement limité à tout ordre ; l'expliciter à l'ordre 5.

    (g) Montrer que $g(x) \sim \sqrt[3]{x}$ au voisinage de $+\infty$.