2 B.C.P.S.T – VÉTO 2

Variables aléatoires usuelles

Mercredi 9 décembre 2015

1. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et dont la loi de probabilité vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \dfrac{4}{n}\, P(X = n - 1)$
   (a) Déterminer l'expression de $P(X = n)$ en fonction de $P(X = 0)$.
   (b) Calculer $P(X = 0)$, puis reconnaitre la loi de X.
2. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n ($n \in \mathbb{N}^*$). On effectue des tirages successifs sans remise et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la k^{e} boule tirée.
   (a) Déteminer la loi de X_1.
   (b) Déteminer la loi de X_2.
   (c) Quelle conjecture peut-on faire ?
   (d) Déterminer la loi de X_k pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
3. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et soit Y la variable aléatoire définie par $Y(\omega) = 0$ si $X(\omega)$ est impair et $Y(\omega) = \frac{X(\omega)}{2}$ si $X(\omega)$ est pair.
   (a) Trouver la loi de Y lorsque X suit une loi géométrique.
   (b) Trouver la loi de Y lorsque X suit une loi de Poisson.
4. Le nombre de visiteurs quotidiens d'un parc d'attractions suit une loi de Poisson de paramètre 10000. Ce parc possède 10 portes d'entrée $E_1, \ldots, \mathbb{E}_{10}$ qui sont choisies par les visiteurs de manière équiprobable.
   (a) Déterminer le nombre moyen de visiteurs en une journée.
   (b) Quelle est la probabilité qu'un visiteur donné se présente à l'entrée E_1.
   (c) On désigne par X_1 le nombre de visiteurs entrant par E_1 en une journée donnée. Trouver la loi de X_1 , calculer son espérance et sa variance.
5. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 6\, u_{n+2} = u_n - u_{n+1}$, et soit X une variable aléatoire telle que $P(X = u_n) = \dfrac{e^{-\lambda}\, \lambda^n}{n!}$. Calculer $E(X)$.
6. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient une boule rouge et $n - 1$ boules blanches. On vide l'urne en effectuant des tirages successifs d'une boule de la façon suivante :
   Les tirages de rang impair se font sans remise et ceux de rang pair avec remise.
   (a) Quel est le nombre N de tirages nécessaires pour vider l'urne ?
   (b) X_k est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si on obtient la boule rouge qu k^{e} tirage, et 0 sinon. X est la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la boule rouge au cours des N tirages.
      i. Pour $k \in [\![1, 2\,n - 1]\!]$ déterminer la loi de X_k (distinguer selon la parité de k).
      ii. En déduire l'espérance de X.
   (c) Y est la variable aléatoire égale au rang du tirage où la boule rouge est tirée pour la première fois.
      i. Déterminer la loi de Y et son espérance.
      ii. Exprimer l'événement $[X = 1]$ en fonction des événements $[Y = 2\,j - 1]$, $j \in [\![1, n]\!]$, en déduire la valeur de $P(X = 1)$.
   (d) Calculer $P(X = n)$