

# Corrigé du devoir surveillé n° 1

## Problème 1

### 1. Un premier cas particulier

(a) i. En choisissant  $x = 0$ , on obtient :  $f(0) = \int_0^0 f(t) dt + e^0 = 0 + 1$ , donc  $f(0) = 1$ .

ii. La relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x f(t) dt + e^x \quad (\star)$$

entraîne que la fonction  $f$  est la somme de  $x \mapsto e^x$ , qui est bien sûr de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et de l'application  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ , qui est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  en tant que primitive (qui s'annule en 0)

de la fonction continue  $f$ . Ainsi,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

*Remarque* : A fortiori,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

En dérivant la relation  $(\star)$ , on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x) + e^x.$$

iii. D'après la question précédente,  $f$  est solution de l'équation différentielle :  $y' - y = e^x$ . Les solutions de l'équation homogène  $y' - y = 0$  sont toutes les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^x \quad (\text{ou } \lambda \in \mathbb{R}).$$

Selon la méthode de variation de la constante, on recherche une solution particulière  $y_p$  de l'équation  $y' - y = e^x$  sous la forme  $\forall x \in \mathbb{R}, y_p(x) = \lambda(x) e^x$  où  $\lambda$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . En reportant dans l'équation  $y' - y = e^x$ , on obtient  $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) e^x = e^x$ , ce qui donne  $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = 1$ . On peut alors prendre  $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = x$ , ce qui nous donne la solution particulière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p(x) = x e^x.$$

Il s'ensuit que les solutions de l'équation  $y' - y = e^x$  sont toutes les fonctions de la forme

$$x \mapsto (\lambda + x) e^x \quad (\text{ou } \lambda \in \mathbb{R}).$$

La condition  $f(0) = 1$  implique alors que  $f$  est la solution de  $y' - y = e^x$  pour laquelle  $(\lambda + 0) e^0 = 1$ , c'est-à-dire  $\lambda = 1$ , donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (1 + x) e^x.$$

(b) On vérifie que la fonction  $f$  trouvée à la question précédente est bien continue et solution de  $(\star)$  sur  $\mathbb{R}$  : Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \int_0^x (1+t) e^t dt + e^x &= [(1+t) e^t]_0^x - \int_0^x e^t dt + e^x \\ &= (1+x) e^x - 1 - [e^t]_0^x + e^x \\ &= (1+x) e^x - 1 - e^x + 1 + e^x \\ &= (1+x) e^x, \end{aligned}$$

où l'intégration par parties de la première ligne est justifiée par le caractère  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  des applications  $t \mapsto 1+t$  et  $t \mapsto e^t$ .

Donc  $x \mapsto (1+x) e^x$  est la seule fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , solution de  $(\star)$ .

### 2. Un second cas particulier

Notons  $(\star\star)$  la relation :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{-x} f(t) dt + e^x$

- (a) i. En choisissant  $x = 0$ , on obtient à nouveau  $f(0) = \int_0^0 f(t) dt + e^0 = 0 + 1$ , donc  $f(0) = 1$ .
- ii. Le théorème de Darboux : « Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive de classe  $\mathcal{C}^1$  sur cet intervalle », entraîne que  $f$  admet une primitive  $F$  (de classe  $\mathcal{C}^1$ ) sur  $\mathbb{R}$ .  
La relation vérifiée par  $f$  s'écrit alors :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = F(-x) - F(0) + e^x$  (\*\*\*)
- iii. D'après la question précédente,  $f$  s'exprime comme somme de composées de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ , donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, en dérivant la relation (\*\*\*) , on obtient :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(-x) + e^x$ .

En choisissant  $x = 0$  dans cette formule, il vient  $f'(0) = -f(-0) + e^0 = -1 + 1 = 0$ , donc  $f'(0) = 0$ .

- iv. La relation  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(-x) + e^x$  entraîne que  $f'$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , comme somme de composées de fonctions qui le sont, donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

D'autre part, en dérivant la relation  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(-x) + e^x$ , on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f'(-x) + e^x.$$

- v. La relation  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -f(-x) + e^x$  (démontrée à la question 2(a)iii) implique que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(-x) = -f(x) + e^{-x}$ . En combinant ce résultat avec celui de la question 2(a)iv, on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f'(-x) + e^x = -f(x) + e^{-x} + e^x,$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) = e^x + e^{-x}.$$

- vi. D'après la question précédente,  $f$  est solution de l'équation différentielle :  $y'' + y = e^x + e^{-x}$ .

L'équation caractéristique de l'équation homogène  $y'' + y = 0$  est  $r^2 + 1$  dont les solutions sont  $r = \pm i$ . Donc, les solutions de l'équation homogène  $y'' + y = 0$  sont toutes les fonctions de la forme  $x \mapsto e^{0x}(\lambda \cos x + \mu \sin x) = \lambda \cos x + \mu \sin x$  (où  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ).

On cherche une solution particulière  $y_{p,1}$  de l'équation  $y'' + y = e^x$  de la forme  $x \mapsto \alpha e^x$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ainsi qu'une solution particulière  $y_{p,2}$  de l'équation  $y'' + y = e^{-x}$  de la forme  $x \mapsto \beta e^{-x}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ . On peut prendre  $y_{p,1} : x \mapsto \frac{1}{2} e^x$  et  $y_{p,2} : x \mapsto \frac{1}{2} e^{-x}$ ; ce qui donne la solution particulière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Il s'ensuit que l'équation  $y'' + y = e^x + e^{-x}$  admet comme solutions toutes les fonctions de la forme  $y : x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x + \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  (où  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ).

Les conditions  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 0$  impliquent alors que  $f$  est la solution de  $y'' + y = e^x + e^{-x}$  pour laquelle  $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 + \frac{1+1}{2} = 1$  et  $-\lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 + \frac{1-1}{2} = 0$ , c'est-à-dire  $\lambda = 0$  et  $\mu = 0$ , donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- (b) La seule solution possible de (\*\*\*) continue sur  $\mathbb{R}$ , est la fonction  $f$  déterminée à la question précédente. Or, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \int_0^{-x} \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt + e^x &= \left[ \frac{e^t - e^{-t}}{2} \right]_0^{-x} + e^x \\ &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} + e^x \\ &= \frac{e^{-x} + e^x}{2}, \end{aligned}$$

ce qui démontre que la fonction  $f$  est bien solution de (\*\*\*) .

En conclusion,

Il existe une unique fonction  $f$ , continue sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant la relation (\*\*), définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

3. (a) **Calcul des dérivées successives de  $f$  :**

i. La continuité de  $f$  permet d'affirmer que  $f$  admet une primitive  $F$  (de classe  $\mathcal{C}^1$ ) sur  $\mathbb{R}$ .

La relation  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{ax} f(t) dt$  s'écrit alors :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = F(ax) - F(0)$ .

ii.  $f$  s'exprime comme somme de composées de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ , donc  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

De plus, en dérivant la relation  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = F(ax) - F(0)$ , on obtient  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = af(ax)$ .

iii. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère l'assertion

$$\mathcal{P}(n) : \quad \langle f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x) \rangle.$$

Initialisation : Par hypothèse,  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et :  $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(0)}(x) = a^{0(0+1)/2} f(a^0 x)$  donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

Hérédité : Fixons  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie et démontrons  $\mathcal{P}(n+1)$ . Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  (d'après 3(a)ii), la fonction  $x \mapsto a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  donc  $f^{(n)}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , ce qui signifie que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $\mathbb{R}$ . En dérivant la relation  $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) &= a^{n(n+1)/2} \cdot a^n f'(a^n x) \\ &= a^{n(n+1)/2} \cdot a^n \cdot a f(a^n x) && \text{d'après 3(a)ii} \\ &= a^{(n+1)(n+2)/2} f(a^{n+1} x), \end{aligned}$$

ce qui entraîne  $\mathcal{P}(n+1)$ .

Conclusion : D'après le principe de récurrence,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).}$$

iv. En choisissant  $x = 0$  dans la relation établie à la question précédente, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = a^{n(n+1)/2} f(a^n \cdot 0) = a^{n(n+1)/2} \cdot f(0).$$

Et, en choisissant  $x = 0, f(0) = \int_0^{a \cdot 0} f(t) dt = 0$  donc  $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 0$ .

(b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère l'assertion

$$\mathcal{Q}(n) : \quad \langle \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \rangle.$$

Initialisation : Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!} f^{(0+1)}(t) dt = \int_0^x f'(t) dt = [f(t)]_0^x = f(x) - f(0) = f(x)$ , car  $f(0) = 0$  d'après la question précédente. Donc  $\mathcal{Q}(0)$  est vraie.

Hérédité : Fixons  $n \in \mathbb{N}$ , supposons que  $\mathcal{Q}(n)$  est vraie et démontrons  $\mathcal{Q}(n+1)$ . On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Comme  $f^{(n+1)}$  et  $t \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , on peut effectuer une intégration par parties par l'intégrale ci-dessus, ce qui donne, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_0^x - \int_0^x \left( -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right)' f^{(n+2)}(t) dt \\ &= -\frac{(x-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= 0 + 0 + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que  $f^{(n+1)}(0) = 0$  pour annuler un terme. Donc  $\mathcal{Q}(n+1)$  est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence,  $\mathcal{Q}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , ce qui signifie que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.}$$

- (c) i. « Toute fonction continue sur un segment est bornée sur ce segment (et y atteint ses bornes) ».

Ainsi  $f$  est bornée sur le segment  $[-A; A]$ , donc  $\boxed{\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in [-A; A], \quad |f(x)| \leq M.}$

D'après 3(a)iii, on a  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$ . En prenant les valeurs absolues dans cette égalité et la restreignant au segment  $[-A; A]$ , on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-A; A], \quad |f^{(n)}(x)| = |a|^{n(n+1)/2} |f(a^n x)|.$$

D'une part  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a|^{n(n+1)/2} \leq 1$ , puisque  $a \in [-1; 1]$

D'autre part, pour tout  $x \in [-A; A]; \quad a^n x \in [-A; A]$  puisque  $a \in [-1; 1]$ ; donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-A; A], \quad |f(a^n x)| \leq M.$$

D'où finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-A; A], \quad |f^{(n)}(x)| \leq M.}$$

- ii. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| && \text{d'après 3b)} \\ &\leq \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)| dt \right| && \text{d'après l'inégalité} \\ &\leq \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} M dt \right| && \text{d'après 3(c)i et le fait} \\ &&& \text{que } [0, x] \subset [-A; A] \end{aligned}$$

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} dt \right| = \begin{cases} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \left[ -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} & \text{si } x \in [0; A] \\ \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{n!} dt = \left[ \frac{(t-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_x^0 = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} & \text{si } x \in [-A; 0] \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} dt \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Il s'ensuit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

Comme  $x \in [-A; A]$ , on a  $|x| \leq A$ , ce qui donne finalement

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x)| \leq \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} M.}$$

Cette inégalité étant vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut passer à la limite en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ .

$A^{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o((n+1)!)$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} M = 0$ .

Par le théorème des gendarmes, on obtient  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x)| = 0$ .

Comme  $|f(x)|$  ne dépend pas de  $n$ , il s'ensuit que  $\boxed{f(x) = 0.}$

(d) D'après la question précédente,  $f$  est la fonction nulle sur  $[-A; A]$ , et ce quel que soit  $A \in \mathbb{R}_+^*$ ; donc

$f$  est la fonction nulle sur  $\mathbb{R}$ .

*Remarque : On a ainsi démontré que la seule solution possible de l'équation homogène est la fonction nulle. Comme il est évident que la fonction nulle est bien solution du problème, on peut affirmer que la fonction nulle est la seule solution de l'équation homogène .*

4. (a) Considérons  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , continues sur  $\mathbb{R}$  et toutes les deux solutions du problème.

On peut écrire  $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \int_0^{ax} f_1(t) dt + \varphi(x)$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = \int_0^{ax} f_2(t) dt + \varphi(x)$ .

En soustrayant ces deux égalités et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f_1 - f_2)(x) = \int_0^{ax} (f_1 - f_2)(t) dt,$$

ce qui signifie que  $f_1 - f_2$  (qui est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que différence de deux telles fonctions) est solution de l'équation homogène. D'après la question précédente, la seule solution de ce problème est la fonction nulle, donc  $f_1 - f_2 = 0$ , c'est-à-dire  $f_1 = f_2$ .

On en conclut que,

sous réserve d'existence, il existe une unique application  $f$ , continue sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant l'équation complète.

(b) On en conclut que

l'ensemble des fonctions  $f$ , continues sur  $\mathbb{R}$ , solutions de l'équation complète est soit vide, soit un singleton.

## Problème 2

### Partie A

1.  $f$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , comme quotient de fonctions qui le sont ; d'autre part,  $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1 = f(0). \text{ Ainsi } f \text{ est continue en } 0, \text{ donc finalement sur } [0, +\infty[.$$

$\exp$  est une fonction convexe (donc sa courbe représentative est au dessus de ses tangentes). Par conséquent, puisque  $y = 1 + x$  est l'équation de la tangente au point d'abscisse 0,  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ,  $e^x \geq 1 + x$ ; et si  $x > 0$ , alors  $e^x > 1 + x$ . On en déduit que  $\forall x > 0$ ,  $e^x - 1 > x > 0$  puis que  $0 < \frac{1}{e^x - 1} \leq \frac{1}{x}$ . Ainsi  $\forall x > 0$ ,  $0 < \frac{x}{e^x - 1} \leq 1$ . Comme  $0 < f(0) = 1$ , l'encadrement est vrai pour tout  $x \in [0, +\infty[$ .

2. Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x > 0$ , alors  $0 < e^{-x} < 1$  donc  $\sum_{k=1}^n e^{-kx} = e^{-x} \times \frac{1 - e^{-nx}}{1 - e^{-x}} = \frac{1 - e^{-nx}}{e^x - 1} = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}$ .

Il suffit de multiplier les deux membres de l'égalité par  $x$  pour obtenir la formule demandée.

3. On intègre par parties :  $\int_0^M x e^{-nx} dx = \left[ -\frac{x e^{-nx}}{n} \right]_0^M + \frac{1}{n} \int_0^M e^{-nx} dx = -\frac{M}{n} e^{-nM} + \frac{1}{n} \int_0^M e^{-nx} dx$

$$\boxed{\int_0^M x e^{-nx} dx = \frac{1}{n^2} - \frac{M e^{-nM}}{n} - \frac{e^{-nM}}{n^2}}$$

$\lim_{X \rightarrow +\infty} X e^{-X} = 0$ , donc par composition de limites (poser  $X = nM$ ) on a  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{M e^{-nM}}{n} = 0$ ;

d'autre part  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{e^{-nM}}{n^2} = 0$ ; donc pour  $n \in \mathbb{N}$  fixé  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M x e^{-nx} dx = \frac{1}{n^2}$

4. On remarque que pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} = f(x) e^{-nx}$ , donc on peut prolonger la fonction  $f_n : x \mapsto \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1}$  par continuité en 0, en posant  $f_n(0) = 1$ . On peut alors écrire :  $\int_0^M \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx = \int_0^M f(x) e^{-nx} dx$ .

L'encadrement de  $f$  obtenu à la question 1 donne par intégration :  $0 \leq \int_0^M \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx \leq \int_0^M e^{-nx} dx = \frac{1 - e^{-nM}}{n} \leq \frac{1}{n}$ .

- La fonction  $f_n$  est à valeurs positives dans  $\mathbb{R}^+$  donc dans  $[0, M]$ , donc  $M \mapsto \int_0^M f_n(x) dx$  est une fonction croissante, majorée par  $\frac{1}{n}$ , donc admet une limite finie lorsque  $M \rightarrow +\infty$ , et cette limite  $L_n$  est comprise entre 0 et  $\frac{1}{n}$ .

- La suite  $(L_n)$  est encadrée par deux suites qui convergent vers une même limite : la suite nulle et la suite de terme général  $\frac{1}{n}$ . Ainsi d'après le théorème des gendarmes, la suite  $(L_n)$  converge vers 0.

5.  $f$  est à valeurs positives sur  $\mathbb{R}^+$ , donc la fonction  $M \mapsto \int_0^M f(x) dx$  est croissante.

D'autre part, pour  $x \geq \ln 2$ , on a :  $e^x - 1 \geq \frac{e^x}{2}$ , donc  $x \geq \ln 2 \implies f(x) \leq 2x e^{-x}$ .

On en déduit, pour  $M \geq \ln 2$  :  $\int_{\ln 2}^M f(x) dx \leq \int_{\ln 2}^M f(x) dx = 1 + \ln 2 - 2(M + 1)e^{-M}$

Par conséquent,  $0 \leq \int_0^M f(x) dx \leq \int_0^{\ln 2} f(x) dx + 1 + \ln 2 - 2(M + 1)e^{-M} \leq \int_0^{\ln 2} f(x) dx + 1 + \ln 2$ .

$M \mapsto \int_0^M f(x) dx$  est croissante et majorée sur  $\mathbb{R}^+$ , donc admet une limite finie en  $+\infty$ .

D'après la question 2, on a :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall x > 0$ ,  $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} + \sum_{k=1}^n x e^{-kx}$ , par conséquent :

$$\forall M > 0, \int_0^M \frac{x}{e^x - 1} dx = \int_0^M \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx + \sum_{k=1}^n \int_0^M x e^{-kx} dx.$$

On a établi aux questions 3 et 4 que  $\int_0^M x e^{-kx} dx$  et  $\int_0^M \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx$  ont des limites finies lorsque  $M \rightarrow +\infty$  ;

on vient de prouver que  $\int_0^M \frac{x}{e^x - 1} dx$  a aussi une limite finie lorsque  $M \rightarrow +\infty$  ; donc on peut passer à la

limite lorsque  $M$  tend vers l'infini :  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx + \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx$ .

De plus,  $\int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx = \frac{1}{k^2}$  (question 3), et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-nx}}{e^x - 1} dx = 0$  (question 4), donc :

$$\int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Remarque : la convergence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx$ , établie en début de question, entraîne aussi la convergence de la suite  $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$

## Partie B

1. Soit  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  : la fonction tangente est continue et dérivable sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , donc sur  $[0, x]$  ; par conséquent il existe  $c \in ]0, x[$  tel que  $\tan x - \tan 0 = (1 + \tan^2 c)(x - 0)$ . De plus, comme  $\tan$  est strictement positive sur  $[0, x]$ , on a  $0 < x < \tan x$ .

De même, la fonction sinus est continue et dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , donc sur  $[0, x]$  ; par conséquent il existe  $d \in ]0, x[$  tel que  $\sin x - \sin 0 = \cos d(x - 0)$ . De plus, comme  $\cos$  est strictement compris entre 0 et 1 sur  $[0, x]$ , on a  $0 < \sin x < x$ .

On en déduit :  $0 < \frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$ , puis  $0 < \frac{1}{\tan^2 x} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{\tan^2 x}$ .

2. (a) Soit  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  :  $(e^{ix})^{2n+1} = e^{i(2n+1)x} = (\cos x + i \sin x)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (i \sin)^k (\cos x)^{2n+1-k}$ .

$\sin((2n+1)x) = \Im(e^{i(2n+1)x})$ , donc seuls les termes imaginaires sont à prendre en compte dans la somme ci-dessus ; comme  $i^k$  est imaginaire si et seulement si  $k$  est impair, on pose  $k = 2\ell + 1$  avec  $0 \leq \ell \leq n$  et on obtient :  $i^k = i^{2\ell+1} = (-1)^\ell i$  et  $\sin((2n+1)x) = \sum_{\ell=0}^n \binom{2n+1}{2\ell+1} (-1)^\ell (\cos x)^{2(n-\ell)} (\sin x)^{2\ell+1}$ .

$\sin x \neq 0$  donc on peut écrire :  $\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin^{2n+1} x} = \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \binom{2n+1}{2\ell+1} \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^{2(n-\ell)} = P_n(\cotan^2 x)$ .

- (b) Les coefficients binômiaux ne sont pas nuls, donc  $P_n$  est de degré  $n$ , de coefficient dominant égal à  $2n+1$ . On remarque que  $\sin((2n+1)x) = 0 \implies P_n(\cotan^2 x) = 0$  ;

or  $\sin((2n+1)x) = 0 \iff x = \frac{k\pi}{2n+1}, k \in \mathbb{Z}$ . En particulier, dans l'intervalle  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , il existe  $n$  valeurs distinctes de  $x$  pour lesquelles  $\sin((2n+1)x) = 0$ , à savoir  $x = \frac{k\pi}{2n+1}, 1 \leq k \leq n$ .

La fonction cotangente est strictement monotone (décroissante) sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , donc :

$$\cotan\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) > \cotan\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) > \dots > \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) > \dots > \cotan\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) > 0.$$

On a les mêmes inégalités avec les  $\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ , qui sont donc  $n$  racines distinctes de  $P_n$ . Or,  $P_n$  est de degré  $n$ , donc il possède au plus  $n$  racines ; on déduit que  $P_n$  possède  $n$  racines réelles, distinctes et strictement positives, qui sont les  $\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right), 1 \leq k \leq n$ .

La somme des racines de  $P_n$  est égale à l'opposé du coefficient de  $X^{n-1}$  divisé par le coefficient dominant de  $P_n$ , soit  $-\frac{(-1)^1 \binom{2n+1}{3}}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$ .

3. De l'encadrement établi à la question 1, on déduit, en remarquant que si  $\tan x \neq 0$ , alors  $\cotan x = \frac{1}{\tan x}$  et

$$\text{en posant } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x = \frac{k\pi}{2n+1} : \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 < 1 + \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

$$\text{En sommant ces inégalités pour } 1 \leq k \leq n : \sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \sum_{k=1}^n \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 < n + \sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

$$\text{soit } \frac{n(2n-1)\pi^2}{3} < (2n+1)^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < n + \frac{n(2n-1)\pi^2}{3}$$

$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2} + \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$$

$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6}, \quad \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{4n}, \quad \text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$