Corrigé du devoir surveillé n^o 5

Premier problème

PARTIE I : un premier exemple

1. (a) Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ le vecteur colonne associé à v ; $v \in \ker(f - \mathrm{Id}) \iff (M - I)\, X = 0$

$$M - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & a-1 & 0 \\ 0 & b & a-1 \end{pmatrix} \text{ donc } v \in \ker(f - \mathrm{Id}) \iff \begin{cases} b\,x + (a-1)\,y = b\,x - b\,y = 0 \\ b\,y + (a-1)\,z = b\,y - b\,z = 0 \end{cases}$$

$b \neq 0$ donc $\boxed{\ker(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\langle(1,1,1)\rangle}$

(b) On a $(f - \mathrm{Id})(e_1) = b\,e_2$ et $b \neq 0$, donc $e_2 \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$; de même $(f - \mathrm{Id})(e_3) = (a-1)\,e_3$ et $a \neq 1$ donc $e_3 \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$. D'après la formule du rang, $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ est de dimension 2 ; or $\langle e_2, e_3\rangle$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$, c'est donc une base.

(c) On vérifie que $v_1 = e_1 + e_2 + e_3 \notin \mathrm{Vect}\langle e_2, e_3\rangle$ donc la famille $\langle v_1, e_2, e_3\rangle$ est libre, c'est une base de $\mathbb{R}^3$. La réunion d'une base de $\ker(f - \mathrm{Id})$ et d'une base de $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ donc les deux sous-espaces sont supplémentaires.

(d) Par définition de p, $p(v_1) = v_1,\ p(e_2) = p(e_3) = 0$; donc $p(e_1) + p(e_2) + p(e_3) = p(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$. On obtient donc $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

2. $\ker(f - \mathrm{Id})$ est de dimension 1, donc 1 est valeur propre de f et $\boxed{E_1 = \ker(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\langle v_1\rangle}$

M est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses cœfficients diagonaux, c'est à dire 1 et a. On détermine à présent E_a :

$v = (x,y,z) \in E_a \iff \begin{cases} x = a\,x \\ b\,x + a\,y = a\,y \\ b\,y + a\,z = a\,z \end{cases}$ Comme $b \neq 0$, on déduit $x = 0$, puis $y = 0$, donc $\boxed{E_a = \mathrm{Vect}\langle e_3\rangle}$

f admet deux valeurs propres, chaque espace propre est de dimension 1, donc $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable}}$

3. (a) $f(v_1) = v_1,\ f(e_2) = a\,e_2 + b\,e_3,\ f(e_3) = a\,e_3$, donc $\boxed{M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}}$

(b) On montre par récurrence sur k que $\forall k \in \mathbb{N},\ (M')^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & kba^{k-1} & a^k \end{pmatrix}$

La formule est vraie de façon évidente pour $k = 0$ et $k = 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose la formule vraie au rang k, on calcule alors $(M')^{k+1}$:

$$(M')^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & k\,b\,a^{k-1} & a^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^{k+1} & 0 \\ 0 & (k+1)\,b\,a^k & a^{k+1} \end{pmatrix}$$ La formule est démontrée.

(c) Le vecteur colonne associé à v_1 est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

(d) La formule de changement de base donne $M = C\,M'\,C^{-1}$, donc par récurrence sur k : $M^k = C\,(M')^k\,C^{-1}$.

$$M^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - a^k & a^k & 0 \\ \alpha_k & k\,b\,a^{k-1} & a^k \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha_k = 1 - k\,b\,a^{k-1} - a^k = 1 - k\,a^{k-1} - (k+1)\,a^k$$

De $a \in]0,1[$, on déduit $\lim\limits_{k \to +\infty} a^k = 0$, puis $\lim\limits_{k \to +\infty} k\,a^{k-1} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{k \to +\infty} M^k = P}$

PARTIE II : un second exemple

1. (a) On remarque que la somme des colonnes de M est égale au vecteur colonne dont toutes les coordonnées valent 1, donc $v_1 = e_1 + \cdots e_n$ vérifie $f(v_1) = v_1$; $v_1 \in \ker(f - \mathrm{Id})$. Pour vérifier qu'il s'agit d'une base, on calcule d'abord $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$, ou bien on constate que la matrice est de rang au moins égal à $n-1$ (donc son noyau de dimension 1 au maximum).

   (b) $(f - \mathrm{Id})(e_i) = -e_i + \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{1}{n-1}\, e_j$, donc $(f-\mathrm{Id})(e_1) - (f-\mathrm{Id})(e_i) = -\left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)(e_1 - e_i)$. Ainsi les vecteurs $e_1 - e_2, \ldots, e_1 - e_n$ appartiennent bien à $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$; d'autre part la matrice A formée des colonnes associés à $e_1 - e_2, \ldots, e_1 - e_n$ est échelonnée :

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ donc les vecteurs $e_1 - e_2, \ldots, e_1 - e_n$ forment une famille libre.

   Conclusion : $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ contient une famille libre de cardinal $n-1$ donc sa dimension est au moins égale à $n-1$; $\ker(f - \mathrm{Id})$ n'est pas réduit à $\{0\}$ *(car $v_1 \in \ker(f - Id)$)* donc sa dimension est au moins égale à 1. Par la formule du rang, on obtient donc $\dim\big(\ker(f - \mathrm{Id})\big) = 1$, $\dim\big(\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})\big) = n-1$, donc $\langle v_1 \rangle$ est une base de $\ker(f - \mathrm{Id})$ et la famille $\langle e_1 - e_2, \ldots, e_1 - e_n \rangle$ une base de $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$.

   (c) $\dim\big(\ker(f - \mathrm{Id})\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})\big) = n$, donc il suffit de montrer que $\ker(f - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) = \{0\}$, ou encore que la famille $\{v_1, e_1 - e_2, \cdots, e_1 - e_n\}$ est libre. On résout $\lambda_1\, v_1 + \lambda_2\,(e_1 - e_2) + \cdots + \lambda_n\,(e_1 - e_n) = 0$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des réels quelconques :
   $\lambda_1\,(e_1 + e_2 + \cdots e_n) + \lambda_2\,(e_1 - e_2) + \cdots \lambda_n\,(e_{n-1} - e_n) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n)\, e_1 - \lambda_2\, e_2 - \cdots - \lambda_n\, e_n = 0$
   La famille $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est libre (c'est une base de $\mathbb{R}^n$) donc tous les cœfficients de la combinaison linéaire sont nuls ; ainsi $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, puis $\lambda_1 = 0$. on a bien montré que la famille $\{v_1, e_1 - e_2, \cdots, e_1 - e_n\}$ est libre, donc $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ sont en somme directe ; ils sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

   (d) $\ker(f - \mathrm{Id})$ est par définition égal à $\mathrm{Im}(p)$ donc $p(v_1) = v_1$; de même $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) = \ker(p)$ donc $p(e_1 - e_2) = \cdots = p(e_1 - e_n) = 0$. Ainsi, $p(e_1) + \cdots + p(e_n) = e_1 + \cdots + e_n$ et $p(e_1) = p(e_2) = \cdots = p(e_n)$, d'où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p(e_i) = \dfrac{1}{n}\, v_1$; la matrice P a donc tous ses cœfficients égaux à $\dfrac{1}{n}$.

   $$\boxed{P = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}}$$

   (e) $v_1 \in \ker(q)$, donc $q(v_1) = 0$ puis $(p+q)(v_1) = v_1 + 0 = v_1$, $p \circ q(v_1) = p(0) = 0$ et $q \circ p(v_1) = q(v_1) = 0$. Soit $i \in [\![2, n]\!]$, $e_1 - e_i \in \mathrm{Im}(q)$ donc $q(e_1 - e_i) = e_1 - e_i$; ainsi $(p+q)(e_1 - e_i) = 0 + e_1 - e_i = e_1 - e_i$, $p \circ q(e_1 - e_i) = p(e_1 - e_i) = 0$ et $q \circ p(e_1 - e_i) = q(0) = 0$. Les propriétés demandées sont vérifiées par tous les vecteurs d'une base, donc par linéarité de p et q elles sont vérifiées pour tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

   Puisque $p + q = \mathrm{Id}$, on a la même égalité entre matrices dans une même base, donc Q est la matrice dont tous les cœfficients sont égaux à $-\dfrac{1}{n}$ sauf les cœfficients diagonaux qui valent $1 - \dfrac{1}{n}$.

   $$\boxed{Q = \begin{pmatrix} \frac{n-1}{n} & \frac{-1}{n} & \cdots & \cdots & \frac{-1}{n} \\ \frac{-1}{n} & \frac{n-1}{n} & \frac{-1}{n} & \cdots & \frac{-1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{-1}{n} & \frac{-1}{n} & \cdots & \frac{-1}{n} & \frac{n-1}{n} \end{pmatrix}}$$

2. Du calcul de $\ker(f - \mathrm{Id})$, on déduit que 1 est valeur propre de f et $E_1 = \mathrm{Vect}\langle v_1 \rangle$. $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $(f - \mathrm{Id})(e_i - e_{i+1}) = -\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)(e_i - e_{i+1})$, donc $e_i - e_{i+1}$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre $\dfrac{-1}{n-1}$. L'espace propre associé contient la famille $\{e_i - e_{i+1},\ i \in [\![1, n-1]\!]\}$ qui est libre et de cardinal $n-1$, donc $\dim\big(E_{\frac{-1}{n-1}}\big) = n-1$ $\boxed{f \text{ admet 2 valeurs propres : 1 et } \dfrac{-1}{n-1}}$ dont les espaces propres associés ont pour dimensions respectives 1 et $n-1$.

$$\boxed{E_1=\mathrm{Vect}\langle v_1\rangle, E_{\frac{-1}{n-1}}=\mathrm{Vect}\langle e_i-e_{i+1},\ i\in[\![1,n-1]\!]\rangle \text{ donc } f \text{ est diagonalisable}}$$

Remarque : M, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique réelle, donc il n'y avait pas besoin de calcul pour conclure à f diagonalisable.

3. On résout $M=\alpha\,P+\beta\,Q$: $\begin{cases} \frac{1}{n}\,\alpha+\frac{n-1}{n}\,\beta=0 \\ \frac{1}{n}\,\alpha+\frac{-1}{n}\,\beta=\frac{1}{n-1}\end{cases}$ d'où $\alpha=1$ et $\beta=\dfrac{-1}{n-1}$.
Les matrices P et Q commutent, en effet $p\circ q=q\circ p=0$ d'où $P\times Q=Q\times P=0$, donc on peut utiliser la formule du binôme : $M^k=(\alpha\,P+\beta\,Q)^k=\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(\alpha\,P)^i\,(\beta\,Q)^{n-i}$. Tous les termes d'indice compris entre 1 et $k-1$ sont nuls car ils comportent des produits $P\times Q$; d'autre part on montre par récurrence que $P^i=P$ et $Q^{n-i}=Q$ pour tout i tel que $1\leqslant i\leqslant n-1$. Finalement, $M^k=\alpha^kP+\beta^kQ=P+\left(\dfrac{-1}{n-1}\right)^kQ$.
Remarques :
• La caractérisation d'un projecteur par $p\circ p=p$ n'étant pas au programme, on ne peut affirmer sans justification que $P^i=P$ ou que $Q^i=Q$; attention aussi, ces formules ne sont valables que pour $i\geqslant 1$, car $P^0=Q^0=I$.
• A priori, la formule ne s'applique pas à $k=0$, néammoins on vérifie que $M^0=P+\left(\dfrac{-1}{n-1}\right)^0Q=P+Q=I$, donc la formule est également valable pour $k=0$.
$\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{-1}{n-1}\right)^k=0$ donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}M^k=P$.
M est inversible car 0 n'est pas valeur propre de M ; on cherche M^{-1} sous forme d'une combinaison linéaire de P et Q, on pose donc $M^{-1}=a\,P+b\,Q$ et on résout $(a\,P+b\,Q)\,(P+\frac{1}{n-1}\,Q)=I$.
$(a\,P+b\,Q)\,(P-\frac{1}{n-1}\,Q)=a\,P^2+b\,Q\,P-\frac{a}{n-1}\,P\,Q+\frac{b}{n-1}\,Q^2=a\,P-\frac{b}{n-1}\,Q=I$; comme $P+Q=I$, on déduit $a=1$ et $b=1-n$.
On remarque qu'en remplaçant k par -1 dans l'expression de M^k, on retrouve la formule donnant M^{-1} ; on pourrait montrer que la même formule est valable pour $k\in\mathbb{Z}$.

PARTIE III : étude du cas général

1. (a) Soit $M=(m_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $M\,V_1\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Posons $M\,V_1=(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, on a $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $x_i=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}m_{i,j}$. Or M est stochastique $\iff$ $(\forall i\in[\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}m_{i,j}=1)$ c'est à dire $M\,V_1=V_1$.
   (b) Soient $(A,B)\in(\mathcal{S}_n)^2$, $(A\,B)\,V_1=A\,\underbrace{(B\,V_1)}_{V_1}=A\,V_1=V_1$, donc $A\,B\in\mathcal{S}_n$.
   Le résultat précédent appliqué à $(A,B)=(A,A)$ montre que $A\in\mathcal{S}_n\Rightarrow A^2\in\mathcal{S}_n$; puis par récurrence sur k, $A^k\in\mathcal{S}_n$, $\forall k\in\mathbb{N}$.
2. (a) Soit $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^n$, $||f(x)||=||M\,X||$ *(X vecteur colonne associé à x)*, $||M\,X||=\displaystyle\max_{i\in[\![1,n]\!]}\left\{\Big|\sum_{j=1}^{n}m_{i,j}x_j\Big|\right\}$
   On remarque que $||x||=\displaystyle\max_{j\in[\![1,n]\!]}\{|x_j|\}$ la plus grande coordonnée en valeur absolue de x ; donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$, on a $\displaystyle\Big|\sum_{j=1}^{n}m_{i,j}x_j\Big|\leqslant\sum_{j=1}^{n}m_{i,j}||x||=||x||$. On en déduit $||f(x)||\leqslant||x||$.
   (b) Soit x un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ : $f(x)=\lambda\,x$ donc $||f(x)||=|\lambda|\,||x||$. Comme $x\neq 0$, il s'ensuit $|\lambda|\leqslant 1$.
   (c) On a vu précédemment que $M\,V_1=V_1$; V_1 est un vecteur propre de M associé à la valeur 1, donc f admet 1 comme valeur propre, avec $v_1=(1,\cdots,1)$ comme vecteur associé.
3. (a) i. Par hypothèse, $y\in\mathrm{Im}(f-\mathrm{Id})$ donc $\exists x\in\mathbb{C}^n$ tel que $y=(f-\mathrm{Id})(x)=f(x)-x$.
   ii. De l'égalité précédente on déduit $f(x)=x+y$ puis $f^2(x)=f(x)+f(y)=x+y+f(y)$. Or $y\in\ker(f-\mathrm{Id})$ donc $f(y)=y$; ainsi $f^2(x)=x+2\,y$. On montre alors par récurrence sur k que

$f^k(x) = x + k\,y$ et $f^k(y) = y$:
La formule est vérifiée pour $k = 1$ et $k = 2$; supposons là vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.
$f^{k+1}(x) = f^k\Big(f(x)\Big) = f^k(x+y) = f^k(x) + f^k(y)$. Par hypothèse de récurrence, $f^k(x) = x + k\,y$ et $f^k(y) = y$. Finalement, $f^{k+1}(x) = x + k\,y + y = x + (k+1)\,y$, la propriété est héréditaire, donc vraie pour toute valeur de $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f^k(x) = x + k\,y}$$

iii. De la question précédente, on déduit $f^k(x) - x = k\,y$ donc $||f^k(x) - x|| = k\,||y||$; d'autre part, $||f^k(x) - x|| \leqslant ||f(x)|| + ||x|| \leqslant 2\,||x||$. Ainsi $k\,||y|| \leqslant 2\,||x||$, ou encore $||y|| \leqslant \dfrac{2}{k}\,||x||$. Cette majoration est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc en faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient $||y|| = 0$ d'où $y = 0$.

(b) On vient de prouver que si $y \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) \cap \ker(f - \mathrm{Id})$, alors $y = 0$, donc $\ker(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ sont en somme directe. La formule du rang donne $\dim\Big(\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})\Big) + \dim\Big(\ker(f - \mathrm{Id})\Big) = n$ donc les deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$.

(c) Soit $x \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$, il existe $z \in \mathbb{C}^n$ tel que $x = f(z) - z$. Donc $f(x) = f\big(f(z)\big) - f(z) = (f - \mathrm{Id})\big(f(z)\big)$. Ainsi $f(x) \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$.

(d) Soit $x \in E_\lambda$ avec $\lambda \neq 1$, $f(x) = \lambda\,x$ donc $f(x) - x = (\lambda - 1)\,x$, et comme $\lambda - 1 \neq 0$, on peut écrire $x = (f - \mathrm{Id})\left(\dfrac{x}{\lambda - 1}\right)$. Ainsi $x \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$, donc $E_\lambda \subset \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$.

Second problème

Préliminaire $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, donc par passage à l'inverse et avec $n = 1$ on obtient : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, puis par composition de limite en posant $u = \sqrt{x}$: $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \frac{u^2}{e^{u^2}} = 0$

L'intégrale considérée est généralisée en $+\infty$; $\displaystyle\lim_{u\to+\infty} u^2\,e^{-u^2} = 0$ donc il existe $A > 0$ tel que $\forall u > A$, $u^2\,e^{-u^2} < 1$.
Soit alors $B > A$, $0 < \displaystyle\int_A^B e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_A^B \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$ qui est une intégrale convergente en $+\infty$.
Par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, on obtient la convergence de $\displaystyle\int_A^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$, donc de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

Intégrale de Gauss

1. • La fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-u^2}$ est à valeurs positives sur $[0, +\infty[$ donc si son intégrale converge (ce qui vient d'être prouvé) elle est positive.
   • $\forall t \in [0,1]$, $1 \leqslant t^2 + 1 \leqslant 2$ donc $\mathrm{e}^{-2\,x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-(t^2+1)\,x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$
   on en déduit $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-2\,x^2}}{t^2+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1)\,x^2}}{t^2+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{t^2+1}\mathrm{d}t$ soit
   $\Big[\mathrm{e}^{-2\,x^2}\,\mathrm{Arctan}\ t\Big]_0^1 \leqslant M(x) \leqslant \Big[\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{Arctan}\ t\Big]_0^1$
   $\dfrac{\pi}{4}\,\mathrm{e}^{-2\,x^2} \leqslant M(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}\,\mathrm{e}^{-x^2}$

2. (a) g est paire, définie, dérivable et à valeurs positives sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2\,x(1 - x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$.
   Sur $\mathbb{R}^+$, g' s'annule en 0 et 1, g croît sur $[0,1]$ et décroît sur $[1, +\infty[$, donc atteint sa valeur maximale pour $x = 1$:

   $$\boxed{g(0) = 0 = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0 \text{ et } K = g(1) = \mathrm{e}^{-1}}$$

   (b) $\forall x \geqslant 0$, $t \mapsto -2\,x\,\mathrm{e}^{-(t^2+1)\,x^2}$ est définie et continue sur le segment $[0,1]$, donc $N(x)$ est une intégrale définie.

En écrivant $\mathrm{e}^{-(t^2+1)\,x^2} = \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{e}^{-t^2\,x^2}$, on obtient : $N(x) = -2\,x\,\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2\,x^2}\mathrm{d}t$, puis par le changement de variable $u = tx$, $N(x) = -2\,x\,\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\frac{\mathrm{d}t}{x} = -2\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}t = -2\,\mathrm{e}^{-x^2}\,L(x)$.

D'autre part L est la primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ qui s'annule en 0, donc $L'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, ce qui conduit au résultat annoncé.

(c) $x \mapsto m_t(x)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (et même de classe $\mathscr{C}^\infty$) et $\forall x \in \mathbb{R},\ m_t'(x) = -2\,x\,\mathrm{e}^{-(t^2+1)\,x^2}$, puis $m_t''(x) = 4\,x^2\,(t^2+1)\,\mathrm{e}^{-(t^2+1)\,x^2} - 2\,\mathrm{e}^{-(t^2+1)\,x^2} = 4\,g\big(x\sqrt{t^2+1}\big) - 2\,\mathrm{e}^{-(t^2+1)\,x^2}$.
$\forall x \in [0,1]$, $0 \leqslant g\big(x\sqrt{t^2+1}\big) \leqslant K$ et $0 \leqslant \mathrm{e}^{-(t^2+1)\,x^2} \leqslant 1$, donc $|m_t''(x)| \leqslant 4\,K + 2$.

(d) m_t est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 sur $[x_0, x]$: $\exists c \in]x_0, x[$ ou $]x, x_0[$ tel que $m_t(x) = m_t(x_0) + (x - x_0)\,m_t'(x_0) + \dfrac{(x-x_0)^2}{2}\,m_t''(c)$, d'où la formule annoncée en divisant par $x - x_0$; puis en prenant la valeur absolue des deux membres :
$\left|\dfrac{m_t(x) - m_t(x_0)}{x - x_0} - m_t'(x_0)\right| = \dfrac{1}{2}\big|x - x_0\big| \times |m_t''(c)| \leqslant (2\,K+1)\,\big|x - x_0\big|$, et enfin par intégration de 0 à 1
$$\left|\frac{\big(M(x) - M(x_0)\big)}{x - x_0} - N(x_0)\right| \leqslant (2\,K+1)\,\big|x - x_0\big| \qquad \boxed{C = 2\,K+1}$$

(e) L'inégalité précédente étant vraie pour tous $(x, x_0) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a : $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{M(x) - M(x_0}{x - x_0} - N(x_0) = 0$, donc par définition du nombre dérivé en un point, $N(x_0) = M'(x_0)$.

3. (a) $M(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \big[\mathrm{Arctan}\ t\big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \boxed{M(0) = \dfrac{\pi}{4}}$

$M(x) - M(0) = \displaystyle\int_0^x M'(u)\,\mathrm{d}u$, or $M'(u) = N(u) = -2\,L'(u)\,L(u)$ donc $M(x) - M(0) = -2\displaystyle\int_0^x L'u()\,L(u)\,\mathrm{d}u$

$M(x) = M(0) - \big[L(u)^2\big]_0^x = \dfrac{\pi}{4} - L(x)^2$ car $L(0) = 0$ $\qquad \boxed{M(x) = \dfrac{\pi}{4} - L(x)^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x^2} = 0$, donc on déduit de l'encadrement de la question 1 $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} M(x) = 0}$

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \lim_{x \to +\infty} L(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} L(x)^2 = \frac{\pi}{4} - \lim_{x \to +\infty} M(x) = \frac{\pi}{4}$.

Comme $L(x) \geqslant 0$, on déduit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$