Correction du devoir n°7

Exercice 1

1. $X \hookrightarrow \mathscr{P}(10)$ donc pour $k \in \mathbb{N},\ P\big([X=k]\big) = \dfrac{e^{-10}\,10^k}{k!}$.

   Pour $k \in \mathbb{N}$, le rapport $\dfrac{P\big([X=k]\big)}{P\big([X=k+1]\big)} = \dfrac{k+1}{10}$, donc $P\big([X=k]\big)$ croit pour $k \leqslant 10$ et décroît ensuite ; remarquer que les probabilités sont égales pour $k=9$ et $k=10$.

2. Il s'agit de calculer $P\big([8 \leqslant X \leqslant 12]\big)$ qui vaut $\displaystyle\sum_{k=8}^{12} \frac{e^{-10}\,10^k}{k!} \simeq 0,57$.

3. Si l'on considère que le déclassement d'un œuf est indépendant de celui des autres, $Y_N \hookrightarrow \mathscr{B}(N, \frac{3}{100})$.

4. $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$; les événements $[N=n]$, $n \in \mathbb{N}$ forment un système complet donc $\forall k \in \mathbb{N},\ [Y=k] = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} \big([Y=k] \cap [N=n]\big)$

   Par la formule des probabilités totales, $\forall k \in \mathbb{N},\ P(Y=k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P\,(N=n) \times P_{[N=n]}\,(Y=k)$.

   Mais pour $n<k$, $P_{[N=n]}\,(Y=k) = 0$ donc $\forall k \in \mathbb{N},\ P(Y=k) = \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} P\,(N=n) \times P_{[N=n]}\,(Y=k) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-10}\,10^n}{n!} \times \binom{n}{k}(0,03)^k \times (0,97)^{n-k} = \frac{e^{-10}\,(0,03)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{10^n (0,97)^{n-k}}{(n-k)!}$, soit par le changement d'indice $j = n-k$:

   $P(Y=k) = \dfrac{e^{-10}\,(0,03)^k}{k!} \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{10^k (9,7)^j}{j!} = \frac{e^{-10}\,(0,3)^k}{k!} \times e^{9,7} = \frac{e^{-0,3}\,(0,3)^k}{k!}$ donc $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(0,3)$

   $\boxed{\text{Le nombre d'œufs déclassés suit une loi de Poisson de paramètre } 0,3.}$

Exercice 2

1. $m(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et on peut calculer pour tout $k \in [\![1,6]\!]$: $P\,(m \geqslant k) = \left(\dfrac{6-k+1}{6}\right)^2$ On en déduit $\forall k \in [\![1,6]\!]$:

   $P\,(m=k) = P\,(m \geqslant k) - P\,(m \geqslant k+1) = \left(\dfrac{6-k+1}{6}\right)^2 - \left(\dfrac{6-k}{6}\right)^2 = \dfrac{13-2\,k}{36}$

   $\star\ E(m) = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} k\,P(m=k) = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6} k\,(13-2\,k) = \frac{1}{36}\left(13 \times \frac{6\times 7}{2} - 2 \times \frac{6\times 7\times 13}{6}\right) = \frac{91}{36}$.

   $\star\ E(m^2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} k^2\,P(m=k) = \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6} k^2\,(13-2\,k) = \frac{1}{36}\left(13 \times \frac{6\times 7\times 13}{6} - 2 \times \left(\frac{6\times 7}{2}\right)^2\right) = \frac{7\times 43}{36}$

   $V(m) = \dfrac{7\times 43}{36} - \left(\dfrac{91}{36}\right)^2 = \dfrac{2555}{36^2}$

2. Par définition $t = \min(x,y) \iff t \leqslant x$ et $t \leqslant y \iff -t \geqslant -x$ et $-t \geqslant -y \iff z-t \geqslant z-x$ et $z-t \geqslant z-y$

   En appliquant ce résultat à $z=7$, on obtient $7-\min(x,y) = 7-m = \max(7-x, 7-y)$. Comme $7-x$ et $7-y$ suivent aussi des lois uniformes sur $[\![1,6]\!]$, $\max(7-x,7-y)$ et $\max(x,y)$ ont même loi.

   On déduit de ce résultat que $\forall k \in [\![1,6]\!]$: $P(M=k) = P(m=7-k) = \dfrac{13-2\,(7-k)}{36} = \dfrac{2\,k-1}{36}$

   Également $E(M) = 7 - E(m) = \dfrac{161}{36}$ et $V(M) = V(m)$.

3. (a) Lorsque A et B sont indépendantes, $V(A+B) = V(A)+V(B)$; la variance de la somme est la somme des variances.

   (b) On a bien sûr $m+M = D_1+D_2$, donc $V(m+M) = V(D_1+D_2) = V(D_1)+V(D_2) = 2\,V(D_1)$ car D_1 et D_2 sont indépendantes et ont même loi. D_1 suit une loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$ donc $V(D_1) = \dfrac{6^2-1}{12} = \dfrac{35}{12}$.

   (c) $V(m+M) = V(m)+V(M)+2\,\mathrm{Cov}(m,M) = \dfrac{35}{6}$ donc $\mathrm{Cov}(m,M) = \dfrac{1}{2}\left(2\times\dfrac{35}{12} - 2\times\dfrac{2555}{36^2}\right) = \left(\dfrac{35}{36}\right)^2$; et si on s'intéresse au coefficient de corrélation linéaire, $\rho\,(m,M) = \dfrac{35}{73}$.

4. (a)

```python
from numpy import *
from random import *
def minimum():
    x=int(6*random()+1)
    y=int(6*random()+1)
    if x<y:
        return x
    else:
        return y
```

(b)

```python
def frequences(N):
    L=[0]*6
    for k in range(N):
        m=minimum()
        L[m-1]+=1/N
    return L
```

On constate que les fréquences observées sont très proches des probabilités calculées pour la loi de m lorsque N est assez grand.

Exercice 3

1. Pour n boules tirées, le plus petit numéro est au maximum égal à $N-n+1$ et le plus grand est au moins égal à n ; ainsi $X(\Omega) = [\![1, N-n+1]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![n, N]\!]$
2. $[X \geqslant x]$ est réalisé si et seulement si toutes les boules sont tirées dans le sous ensemble dont les numéros vont de x à N ; cet ensemble est de cardinal $N-x+1$ donc $P(X \geqslant x) = \dfrac{\binom{N-x+1}{n}}{\binom{N}{n}}$

   Or $[X = x] = [X \geqslant x] \setminus [X \geqslant x+1]$, par conséquent $P(X = x) = \dfrac{\binom{N-x+1}{n}}{\binom{N}{n}} - \dfrac{\binom{N-x}{n}}{\binom{N}{n}} = \dfrac{\binom{N-x}{n-1}}{\binom{N}{n}}$
3. $[Y \leqslant y]$ est réalisé si et seulement si toutes les boules sont tirées dans le sous ensemble dont les numéros vont de 1 à y ; cet ensemble est de cardinal y donc $P(Y \leqslant y) = \dfrac{\binom{y}{n}}{\binom{N}{n}}$

   Or $[Y = y] = [Y \leqslant y] \setminus [Y \leqslant y-1]$, par conséquent $P(Y = y) = \dfrac{\binom{y}{n}}{\binom{N}{n}} - \dfrac{\binom{y-1}{n}}{\binom{N}{n}} = \dfrac{\binom{y-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$
4. $[X > x] \cap [Y \leqslant y]$ est réalisé si et seulement si toutes les boules sont tirées ont des numéros compris entre $x+1$ et y, donc $P\left([X > x] \cap [Y \leqslant y]\right) = \dfrac{\binom{y-x}{n}}{\binom{N}{n}}$; on remarque que si $n > y - x$, alors $P\left([X > x] \cap [Y \leqslant y]\right) = 0$.

   On décompose l'événement $[X = x] \cap [Y = y]$: $[X = x] \cap [Y \leqslant y] = \Big([X > x-1] \cap [Y \leqslant y]\Big) \setminus \Big([X > x] \cap [Y \leqslant y]\Big)$

   $[X = x] \cap [Y = y] = \Big([X = x] \cap [Y \leqslant y]\Big) \setminus \Big([X = x] \cap [Y \leqslant y-1]\Big)$

   $= \Big([X > x-1] \cap [Y \leqslant y]\Big) \cup \Big([X > x] \cap [Y \leqslant y-1]\Big)\Big) \setminus \Big([X > x] \cap [Y \leqslant y]\Big) \setminus \Big(\Big([X > x-1] \cap [Y \leqslant y-1)]\Big)$

   Donc $P\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big) = P\Big([X > x-1] \cap [Y \leqslant y]\Big) + P\Big([X > x] \cap [Y \leqslant y]\Big) - 2\,P\Big([X > x] \cap [Y \leqslant y]\Big) = \dfrac{\binom{y-x+2}{n-2}}{\binom{N-2}{n-2}}$
5. (a) $E(Z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{q} k\,P(Z = k) = \sum_{k=1}^{q} k\Big(P(Z \geqslant k) - P(Z \geqslant k+1)\Big) = \sum_{k=1}^{q} k\,P(Z \geqslant k) - \sum_{k=2}^{q} (k-1)\,P(Z \geqslant k)$

   $E(Z) = P(Z \geqslant 1) + \displaystyle\sum_{k=2}^{q} P(Z \geqslant k) = \sum_{k=1}^{q} P(Z \geqslant k)$

   (b) $E(X) = \displaystyle\sum_{x=1}^{N-n+1} P(X \geqslant x) = \sum_{x=1}^{N-n+1} \frac{\binom{N-x+1}{n}}{\binom{N}{n}}$; et en posant $k = N - x + 1$, on obtient

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=n}^{N} \frac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N+1}{n+1}}{\binom{N}{n}} = \frac{N+1}{n+1}}$$